VISIT…

К.К.ЛИХАРЕВ, Н.А.СУХОВА

СБОРНИК ЗАДАЧ
по курсу
«СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов машиностроительных специальностей вузов

МОСКВА «МАШИНОСТРОЕНИЕ» 1980

ББК 30.121
Л65
УДК 539.3 (076)

Рецензенты

кафедра «Сопротивление материалов»
Московского авиационного института
и **М. Н. Степнов**

Лихарев К. К., Сухова Н. А.

Л65 Сборник задач по курсу «Сопротивление материалов»: Учеб. пособие для машиностроительных вузов. — М.: Машиностроение, 1980. — 224 с., ил.

В пер.: 80 к.

Л $\frac{30106\text{-}019}{038(01)\text{-}80}$ 19-80. 2105000000

ББК 30.121
605

ИБ № 1664

Константин Константинович Лихарев, Нина Афанасьевна Сухова

СБОРНИК ЗАДАЧ
по курсу
«СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

Редактор издательства О. Ф. Корсун Технические редакторы: Л. Т. Зубко, Н. В. Тимофеенко
Корректоры А. М. Усачева и Н. Г. Богомолова
Переплет художника Е. В. Бекетова

Сдано в набор 04.08.79. Подписано в печать 14.01.80. Т-00811. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 14,0. Уч.-изд. л. 12,85. Тираж 60 000 (1-й з-д 1—30 000) экз. Заказ 1500. Цена 80 к.

Издательство «Машиностроение», 107885, Москва, ГСП-6, 1-й Басманный пер., 3.

Ленинградская типография № 6 Ленинградского производственного объединения «Техническая книга» Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
193144, г. Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10.

© Издательство «Машиностроение», 1980 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Посвящается 150-летию МВТУ им. Н. Э. Баумана

Настоящее учебное пособие представляет собой систематизированную подборку задач и упражнений по основным разделам курса «Сопротивление материалов», предусмотренным программой для машиностроительных и транспортных специальностей высших учебных заведений, утвержденной Учебно-методическим управлением по высшему образованию 19 мая 1976 г. Наряду с классическими задачами в него включены оригинальные задачи и примеры, тесно связанные с практикой машиностроения. Постановка ряда задач способствует вовлечению студентов в исследовательскую работу, предполагает поиск оптимального решения по различным показателям.

Сборник является пособием для изучения теоретического материала, изложенного в учебнике В. И. Феодосьева «Сопротивление материалов», изд. 8-е. М., Наука, 1979.

При составлении пособия широко использован более чем столетний опыт преподавания курса «Сопротивление материалов» в МВТУ им. Н. Э. Баумана. В сборник включены простые типовые задачи, не требующие, как правило, много времени для вычислений. Материал расположен в соответствии с рабочим планом курса, читаемого кафедрой «Сопротивление материалов» МВТУ им. Н. Э. Баумана. Такое расположение, обладая достаточной логичностью и стройностью, дает возможность охватить большое число принципиально важных вопросов. Расчеты за пределами упругости не выделяются в особый раздел, а рассредоточены по всему курсу. Задачи сформулированы так, что там, где нет специальной оговорки в тексте задачи или в названии параграфа, материал предполагается линейно-упругим. Некоторые характеристики материалов, наиболее часто встречающихся в тексте, даны в начале книги.

Все приведенные в сборнике задачи имеют ответы, некоторые снабжены промежуточными результатами, дающими возможность

контролировать ход решения. Для наиболее сложных задач даны решения, но без подробных объяснений, чтобы заставить учащегося думать, так как только размышление способствует активному усвоению материала.

Задачи решены с помощью микрокалькулятора «Электроника БЗ-18», однако ответы даны лишь с обычной для инженерных расчетов точностью: три значащие цифры (или четыре, если первая единица), коэффициенты запаса приведены с точностью до десятых долей единицы. В отдельных случаях (например, при решении статически неопределимых задач изгиба, расчете пластин и оболочек) промежуточные результаты даны с большей точностью. И, наконец, в задачах такого типа, как определение перемещений по методу Мора—Верещагина и т. п., где точное значение полученного результата дает возможность проверить промежуточные выкладки, ответ дан в простых дробях.

Обозначения, как правило, соответствуют принятым в учебнике В. И. Феодосьева.

Сборник рассчитан на студентов и аспирантов технических вузов. Он может быть полезен также широкому кругу преподавателей и инженеров.

ОБЩИЕ ДЛЯ ВСЕХ ЗАДАЧ ДАННЫЕ

1. Если нет особых оговорок, деформация предполагается линейно-упругой, характеристики материала при растяжении и сжатии одинаковыми, концентрация напряжений не учитывается.

2. Если в условии задачи не приведены сведения о свойствах материала, принять:

модуль упругости E, МПа:

стали $2 \cdot 10^5$,

чугуна $1{,}1 \cdot 10^5$,

бронзы $1 \cdot 10^5$,

меди $1 \cdot 10^5$,

модуль сдвига стали $G = 8 \cdot 10^4$ МПа;

коэффициент Пуассона стали $\mu = 0{,}3$;

температурный коэффициент линейного расширения α, $°C^{-1}$:

стали $1{,}25 \cdot 10^{-5}$,

меди $1{,}65 \cdot 10^{-5}$,

плотность стали $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3;

удельный вес стали $\gamma = 78 \cdot 10^3$ Н/м^3.

ГЛАВА 1

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА

§ 1. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ

1.01. Сопоставить предельную длину свободно висящего, подвешенного за один конец, каната, свитого из капроновых нитей, и каната, свитого из стальной проволоки.

Канат капроновый диаметром 8 мм. Вес 100 м каната 42,2 Н. Разрывное усилие 11,6 кН.

Канат из стальной проволоки диаметром 8 мм. Вес 100 м каната 221 Н. Разрывное усилие 38,4 кН.

1.02. Определить изменение расстояния Δ между точками A и B при растяжении силой P тонкостенного коробчатого бруса (рис. 1.01). Модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ материала бруса известны.

1.03. На поверхности равномерно растянутого бруса (рис. 1.02) под углом α к его оси нанесен отрезок AB длиной l. Определить изменение длины этого отрезка, если напряжение в поперечных сечениях бруса $\sigma_z = 100$ МПа; $\alpha = 30°$; $l = 0{,}1$ м; $E = 10^5$ МПа; $\mu = 0{,}2$. Определить изменение угла γ между направлением AB и перпендикулярным ему до деформации направлением CD.

1.04. Для брусьев, изображенных на рис. 1.03, построить эпюры нормальных сил, напряжений и перемещений (модуль упругости материала E). Определить для каждого бруса наибольшие напряжения, перемещения и коэффициенты запаса по текучести, если $P = ql = 10$ кН; $F = 200$ мм^2; $l = 200$ мм; $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 200$ МПа; $E = 10^5$ МПа.

1.05. В результате некоторого внешнего воздействия длины стержней AB и AC (рис. 1.04) изменились на Δl_1 и Δl_2 соответственно. Определить полное перемещение δ узла A и угол γ между направлением этого перемещения и вертикалью.

1.06. Под каким углом α следует приложить силу P к системе из двух стержней, изображенной на рис. 1.05, чтобы узел перемещался горизонтально.

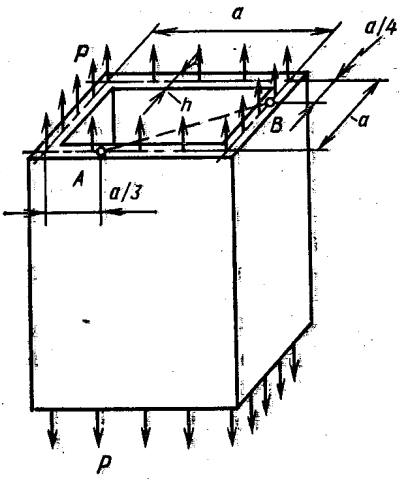


Рис. 1.01

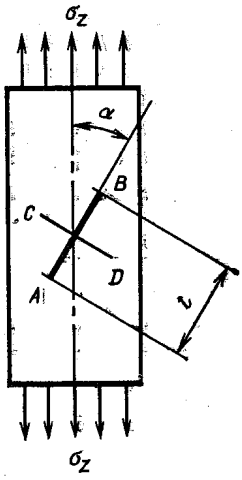


Рис. 1.02

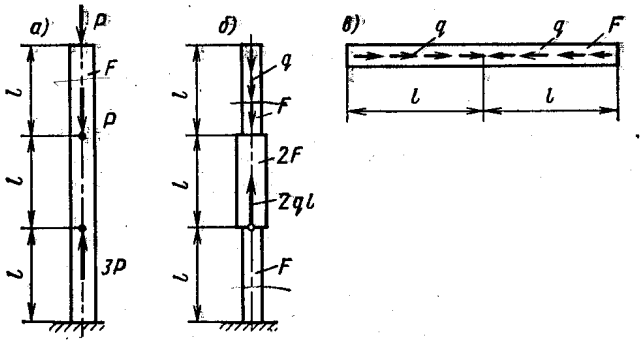


Рис. 1.03

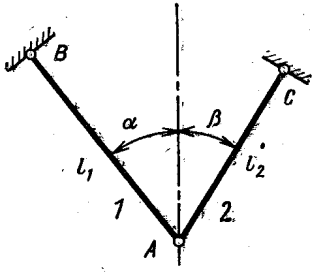


Рис. 1.04

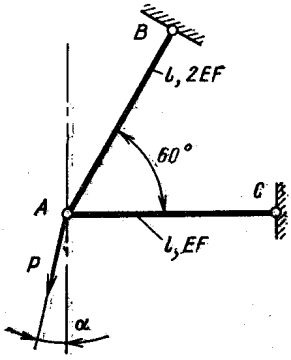


Рис. 1.05

1.07. Абсолютно жесткий невесомый брус AB (рис. 1.06) подвешен на двух одинаковых тягах и нагружен сосредоточенной силой P. Определить положение груза, при котором его перемещение минимально.

1.08. Стержень, жесткость которого EF, нагружен двумя независимыми нагрузками P и T (рис. 1.07). Вычислить работу A внешних сил в случаях, если:

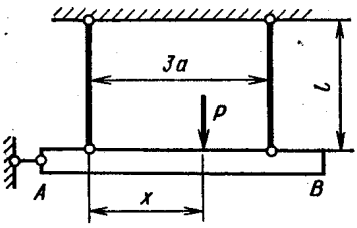


Рис. 1.06

1) сначала приложена сила P, потом T;

2) сначала приложена сила T, потом P;

3) силы P и T увеличиваются одновременно, пропорционально некоторому параметру.

1.09. Брусья постоянного поперечного сечения F закреплены одним концом и нагружены так, как показано на рис. 1.08. Определить работу, совершаемую внешними силами при деформировании брусьев. Проверить полученный результат, подсчитав потенциальную энергию деформации как сумму энергий, накопленных отдельными участками. Модуль упругости материала брусьев E.

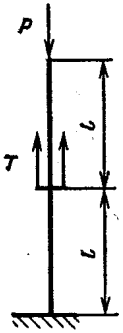


Рис. 1.07

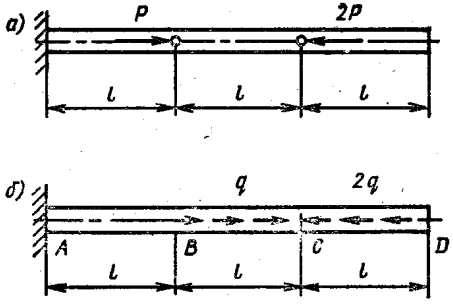


Рис 1.08

1.10. Шарнирно закрепленные, абсолютно жесткие невесомые брусья AB и CD (рис. 1.09) соединены между собой при помощи двух одинаковых тяг CE и BG. К тяге BG в сечении K приложена сила P. Определить работу, совершаемую этой силой при деформировании тяг. Проверить полученный результат, подсчитав энергию деформации, накопленную каждой тягой в отдельности (жесткость тяг EF).

1.11. Определить податливость δ при растяжении (сжатии) усеченного конуса, изображенного на рис. 1.10. Подсчитать внешний диаметр D эквивалентного по податливости цилиндра той же длины с внутренним диаметром d ($l \gg d$).

Указание. Податливостью бруса при растяжении (сжатии) называется изменение длины, вызванное единичной нагрузкой.

1.12. При каком угле α и соотношении диаметров элементов кронштейна ABC, изображенного на рис. 1.11, масса конструкции наименьшая. Стержни AB и BC стальные (AB — круглого поперечного сечения диаметром d; BC — труба диаметром D с толщиной стенки $h = \frac{D}{20}$). Допускаемое напряжение $[\sigma]$ для сжатого стержня в 5 раз меньше допускаемого напряжения для растянутого стержня.

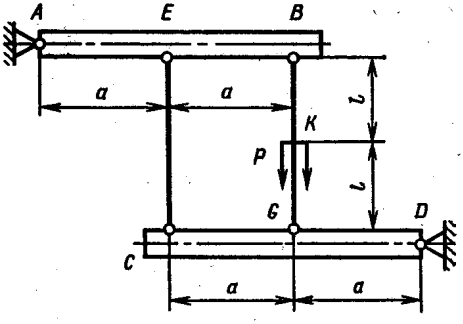


Рис. 1.09

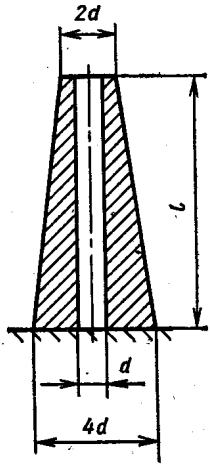


Рис. 1.10

1.13. При каком значении a (рис. 1.12) изменение длины однородного стержня постоянного поперечного сечения равно нулю? Масса стержня M.

1.14. Жесткий брус AB (рис. 1.13), подвешенный на двух одинаковых стальных тягах AO и BO, вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O, с постоянной угловой

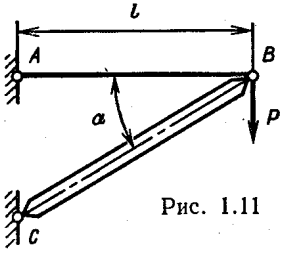


Рис. 1.11

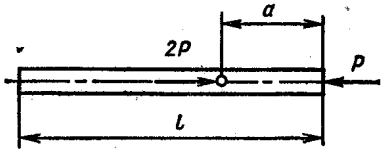


Рис. 1.12

скоростью $\omega = 30\ с^{-1}$. Определить натяжение тяг N и удаление Δ бруса AB от оси вращения. Весом тяг и бруса пренебречь. Погонная масса бруса $\rho = 100$ кг/м, длина тяги $l = 1$ м, диаметр поперечного сечения тяги $d = 20$ мм, $\alpha = 30°$. Подсчитать коэффициент запаса по текучести $n_т$, если $\sigma_т = 300$ МПа.

1.15. При решении многих задач сопротивления материалов используется принцип неизменности начальных размеров. Для

системы, изображенной на рис. 1.14, определить наибольший угол α, до которого возможно применение этого принципа. Продольная деформация стержней не превышает 10^{-3}, допустимая ошибка при определении внутренних сил должна быть не больше $\pm 5\%$.

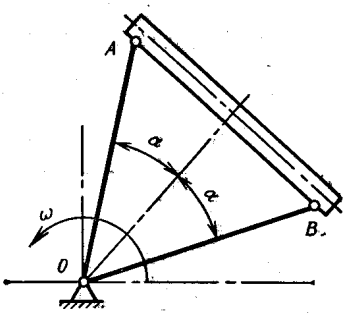


Рис. 1.13

1.16. В зажимном приспособлении, изображенном на рис. 1.15, усилие T, прижимающее плиту A к опоре, создается перемещением узла B из положения *1* в положение *2*. Определить зависимость усилия T от Δ_1 и Δ_2 ($\Delta_1 \ll a$; $\Delta_2 \ll a$) и наибольшую силу P_{max}, необходимую для перемещения рычагов BC и BD из верхнего положения в нижнее. Подсчитать максимальное напряжение, возникающее в рычагах. Материал рычагов и размеры считать известными. Податливостью стержня DE пренебречь. Жесткость рычагов BC и BD равна EF.

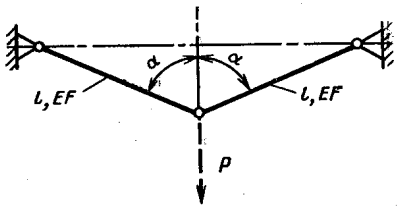


Рис. 1.14

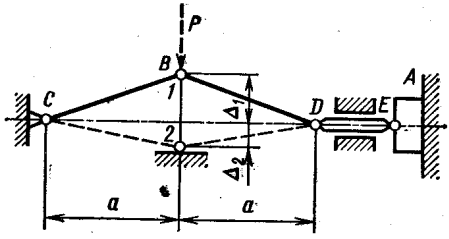


Рис. 1.15

1.17. Определить усилия, возникающие в одинаковых стальных стержнях AB и AC постоянного поперечного сечения $F = 100$ мм^2 при действии силы $P = 30$ кН (рис. 1.16). Длины стержней $l = 1$ м, угол наклона стержня в ненагруженном состоянии $\alpha_0 = 5°$.

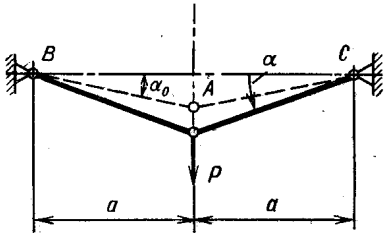


Рис. 1.16

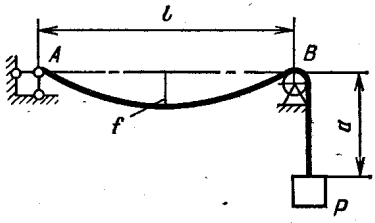


Рис. 1.17

1.18. Определить вес груза P, обеспечивающий провис $f = 0{,}01l$ гибкого провода, натянутого между опорами A и B (рис. 1.17). Погонный вес провода q. Трением в блоке B пренебречь, $a \ll l$.

1.19. Невесомая упругая нить, расположенная по прямой между опорами A и B, нагружается равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 1.18). Определить стрелу провиса f и натяжение T. Дано: $q = 0{,}8$ Н/м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $F = 10$ мм^2; $l = 100$ м.

1.20. Невесомая упругая нить (рис. 1.19) натянута между опорами A и B силой T_0. Определить стрелу провиса f и натяжение T под действием нагрузки q. Дано: $q = 0{,}8$ Н/м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $F = 10$ мм^2; $l = 100$ м; $T_0 = 466$ Н.

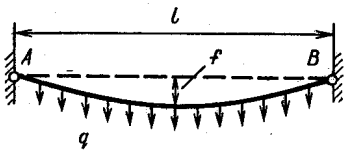


Рис. 1.18

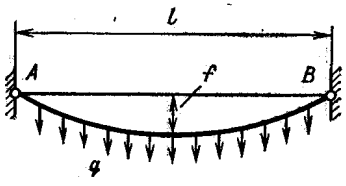


Рис. 1.19

1.21. Стальная струна AB (рис. 1.20) натянута между двумя жесткими опорами так, что напряжение в ней $\sigma_0 = 100$ МПа. Определить наибольшую амплитуду $a = a_{доп}$ колебаний струны, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 300$ МПа. Форма колебаний — полуволна синусоиды. Расстояние между опорами $l = 1$ м.

1.22. Тонкая бесконечно длинная упругая лента, площадь поперечного сечения которой F, погонный вес q, свободно лежит на шероховатой поверхности (рис. 1.21). Определить силу P, необходимую для смещения конца ленты на δ. Коэффициент трения ленты по поверхности опоры f, модуль упругости материала ленты E.

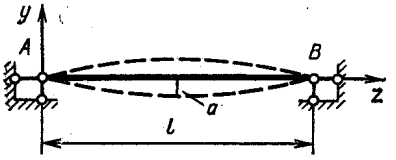


Рис. 1. 20

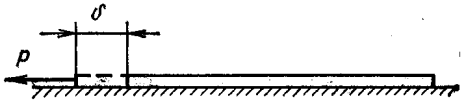


Рис. 1.21

1.23. Стержень AB удерживается в опоре CD равномерно распределенной силой трения, интенсивностью q (рис. 1.22). При действии силы $P = P^*$ стержень начинает двигаться. Определить перемещение δ правого торца стержня при $P = \frac{1}{2} P^*$. Чему будет равно это перемещение ($\delta_{ост}$), если нагрузку снять? Жесткость стержня при растяжении EF известна.

1.24. Тонкостенное стальное кольцо (рис. 1.23), нагруженное внутренним давлением p, охлаждено так, что восстановились размеры недеформированного кольца. Определить изменение температуры t °С и напряжение в кольце до охлаждения и после. Дано: $D = 100$ мм; $h = 1$ мм; $b = 3$ мм; $p = 1$ МПа.

1.25. Тонкое упругое кольцо ($d \ll D$) свободно надето на массивный жесткий конус (рис. 1.24). Определить силу P, необходимую для смещения кольца вдоль оси конуса на величину h. Коэффициент трения кольца по поверхности конуса f. Жесткость кольца при растяжении EF. Угол $\alpha \leqslant 6°$, так что $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$; $\cos\alpha \approx 1$.

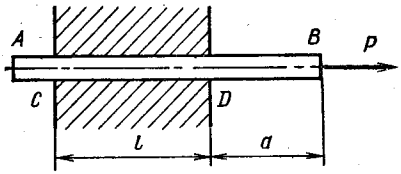


Рис. 1.22

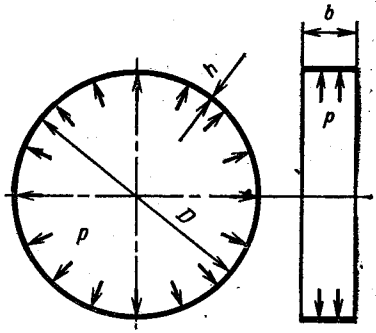


Рис. 1.23

1.26. На рис. 1.25 изображена схема тормозного устройства. Шкив радиусом R приводится во вращение моментом M. Тормозной момент создается силами трения между гибкой стальной лентой AB и шкивом, возникающими при действии силы P, приложенной к рычагу CK. Определить вес груза P и перемещение δ

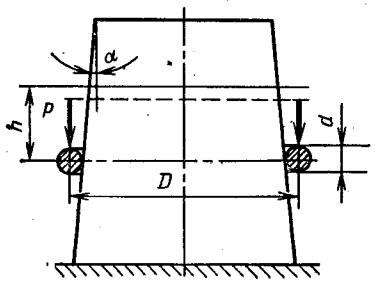


Рис. 1.24

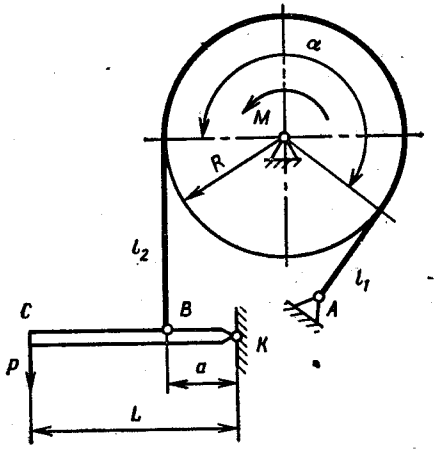


Рис. 1.25

точки C, необходимые для уравновешивания момента M. Угол охвата шкива лентой α, коэффициент трения ленты о шкив f. Дано: $M = 500$ Н·м; $R = 0{,}2$ м; $L = 5a = 1$ м; $\alpha = 230°$; $l_1 = R$; $l_2 = 2R$; $f = 0{,}2$; ширина ленты $b = 30$ мм; толщина $h = 1$ мм. Рычаг KC считать жестким.

§ 2. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

1.27. По данным испытания на растяжение стального образца определить модуль упругости E, предел пропорциональности $\sigma_{пц}$ и предел текучести $\sigma_т$

σ, МПа	0	20	60	100	140	180	220	260	300	340	380	400
$\varepsilon \cdot 10^5$	—	9,9	20,1	20,3	19,7	20,0	25,0	30,0	37,0	45,0	73,0	100

Указание. Для определения модуля упругости и предела пропорциональности следует построить диаграмму $\Delta\varepsilon = F(\sigma)$ в интервале 20 МПа $\leqslant \sigma \leqslant$ 380 Мпа. Горизонталь, отстоящая от оси σ на расстоянии $1{,}5\Delta\varepsilon_{упр}$, определит значение $\sigma_{пц}$. Для определения $\sigma_т$ необходимо, используя все замеры, построить диаграмму $\sigma = f(\varepsilon)$.

1.28. По данным испытаний на растяжение и сжатие образцов двух марок стали, чугуна и дюралюминия построить характеристики этих материалов при растяжении и сжатии. Схематизировать характеристики, считая, что наибольшая расчетная деформация равна 0,05.

а) Низкоуглеродистая сталь (*HRB* 77; $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа)

Растяжение	σ, МПа	310*	320	325	380	500	510	520	340**
	$\varepsilon \cdot 10^3$	1,48	3,52	18,0	50,0	100	150	222	280
Сжатие	σ, МПа	270*	315	650	750	1000			
	$\varepsilon \cdot 10^3$	1,29	3,50	100	150	250			

б) Высокоуглеродистая сталь У12 (*HRC* 62; $E = 2{,}15 \cdot 10^5$ МПа)

Растяжение	σ, МПа	1200*	1800	2200	2400**
	$\varepsilon \cdot 10^3$	5,58	10,0	20,0	30,0
Сжатие	σ, МПа	3000*	3100	3500	3800**
	$\varepsilon \cdot 10^3$	14,0	16,4	25,0	40,0

в) Чугун СЧ28—48 ($E = 1{,}1 \cdot 10^5$ МПа)

Растяжение	σ, МПа	80*	140	145	150**
	$\varepsilon \cdot 10^3$	0,727	3,27	5,00	8,00
Сжатие	σ, МПа	200*	280	310	325**
	$\varepsilon \cdot 10^3$	1,82	4,54	5,00	7,00

г) Дюралюминий прутковый ($E = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа)

Растяжение	σ, МПа	300*	320	480	500	520	500**
	$\varepsilon \cdot 10^3$	3,75	6,00	50,0	70,0	100	150
Сжатие	σ, МПа	300*	320	500	640	750	
	$\varepsilon \cdot 10^3$	3,75	6,00	50,0	120	200	

Примечание. Индексом * помечена точка, соответствующая пределу пропорциональности, индексом ** — точка, соответствующая разрушению. Напряжения σ определены по формуле $\sigma = P/F_0$, деформации $\varepsilon = \Delta l/l_0$.

1.29. Выбрать схематизированную характеристику стали, диаграмма растяжения которой показана на рис. 1.26, если предполагаемая наибольшая деформация в рассчитываемой конструкции ε_{max} равна: *а*) 10^{-3}; *б*) $5 \cdot 10^{-3}$; *в*) $50 \cdot 10^{-3}$.

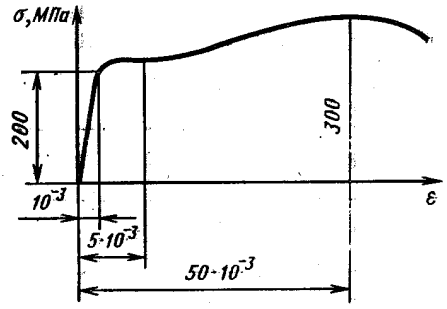


Рис. 1.26

1.30. По данным испытаний на растяжение и сжатие образцов резины построить характеристики этого материала $\sigma = f(\lambda)$, где $\sigma = P/F_0$ — условное напряжение в поперечном сечении образца, $\lambda = l_1/l$ — степень удлинения.

Растяжение	σ, МПа	0,4	0,7	0,8	1,1	1,3	1,7	2,7	5,0
	λ	2	3	4	5	6	7	8	9
Сжатие	σ, МПа	0,1	0,2	0,4	0,5	0,7			
	λ	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75			

1.31. Образцы из очень хрупких материалов при испытании на растяжение разрушаются около головок, что занижает искомое значение предела прочности. Какой формы образец дает возможность определить предел прочности с минимальной ошибкой? Как приближенно построить характеристику материала до разрушения?

§ 3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ В ПРЕДЕЛАХ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ

1.32. Для брусьев, изображенных на рис. 1.27 в недеформированном состоянии, построить эпюры нормальных сил, напряжений и осевых перемещений, возникающих после приложения нагрузки. Подсчитать наибольшее напряжение и перемещение, если $P = P^* = 10$ кН; $l = 200$ мм; $F = 100$ мм^2, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа (зазор Δ изображен на рисунке утрированно, не в масштабе).

1.33. Стальной брус и медная трубка одним концом прикреплены к опоре, а другим — к жесткому фланцу (рис. 1.28). После

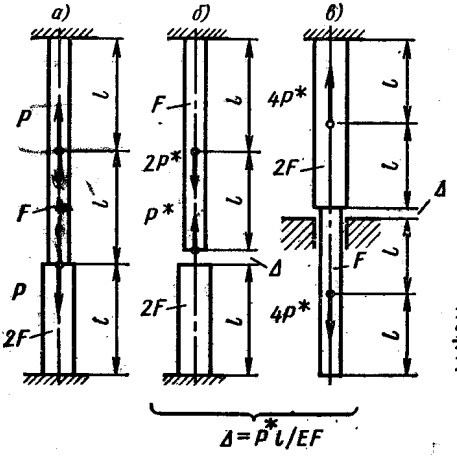


Рис. 1.27

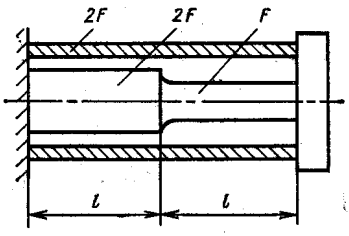


Рис. 1.28

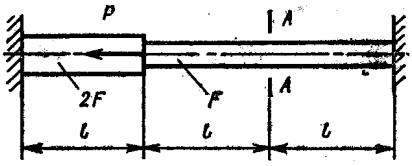


Рис. 1.29

сборки система нагревается на t °С. Построить эпюры нормальных сил и напряжений, возникающих в поперечных сечениях бруса и трубки, и эпюры осевых перемещений этих сечений. Дано: $l = 100$ мм, $F = 200$ мм^2, $t = 100$ °С.

1.34. Брус, жестко закрепленный по концам, нагрет по всей длине на t °С и нагружен силой P (рис. 1.29). Полагая размеры бруса, температурный коэффициент линейного расширения и модуль упругости материала известными, определить, при каком значении силы P сечение $A—A$ остается неподвижным. Построить при этих условиях эпюры нормальных сил, напряжений и осевых перемещений.

1.35. Брус AB (рис. 1.30) закреплен слева неподвижно; справа между опорой и брусом в недеформированном состоянии имеется зазор $\Delta = \frac{P^* l}{EF}$ (E — модуль упругости материала бруса; F — площадь его поперечного сечения). Подсчитать работу A силы $P = 3P^*$, приложенной в сечении C, и сравнить ее с потенциальной энергией деформации U.

1.36. Определить, при каком значении размера a все участки

бруса, изображенного на рис. 1.31, равнопрочны. Предел текучести материала бруса при растяжении составляет две трети предела текучести при сжатии, модуль упругости E.

1.37. Жестко закрепленный по концам брус AB (рис. 1.32) постоянного поперечного сечения F несет на себе поршень C, который может двигаться в осевом направлении после преодоления

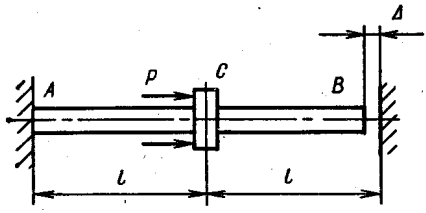


Рис. 1.30

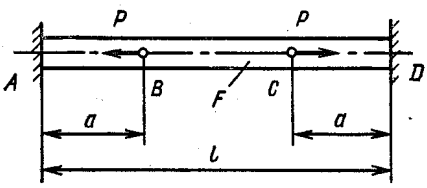


Рис. 1.31

силы трения T. Исследовать зависимость усилий N в поперечных сечениях стержня AB и перемещения w поршня C от силы P, изменяющейся от нуля до $3T$ с последующей разгрузкой. Модуль упругости материала бруса E известен.

1.38. Для стержневых систем, изображенных на рис. 1.33, определить нормальные силы, возникающие в поперечных сечениях стержней, и подсчитать работу A, производимую внешними нагрузками при деформировании систем. Все стержни имеют одинаковое

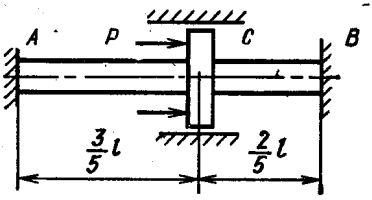


Рис. 1.32

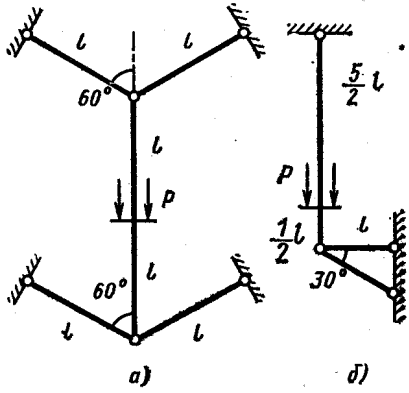


Рис. 1.33

постоянное сечение и выполнены из одного материала, их жесткость при растяжении-сжатии EF.

1.39. Жесткий брус AB должен быть подвешен к опоре при помощи четырех одинаковых стальных стержней, номинальная длина которых $l_0 = 1$ м (рис. 1.34). Фактическая длина $l_1 = 1{,}0$ м $l_2 = 0{,}998$ м, $l_4 = 0{,}999$ м. Какой должна быть фактическая длина третьего стержня, чтобы после сборки брус расположился горизонтально? Весом бруса пренебречь.

1.40 *. Для затяжки соединения болт — трубка (рис. 1.35) после закрытия зазоров гайку поворачивают на $^1/_4$ оборота. Определить возникающие при этом усилия N_0 в болте и трубке, если податливости их известны; шаг одноходовой резьбы s, податливостью резьбы, болта и гайки пренебречь. Исследовать закон изменения этих усилий при действии силы P. Дано: $l = 200$ мм; $d = 10$ мм; $D_1 = 12$мм; $D_2 = 24$ мм; $s = 1$ мм, материал болта сталь, трубки — медь. Задачу решить аналитически, рассматривая одновременно графическое решение.

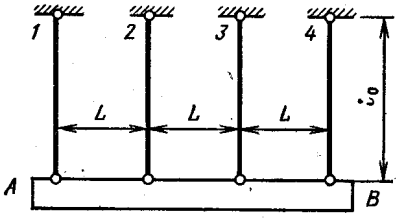


Рис. 1.34

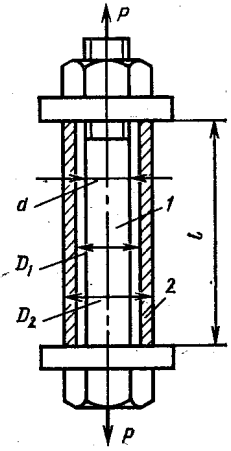


Рис. 1.35

1.41. Между фланцами трубопровода, стянутыми болтами *1*, помещена резиновая прокладка *2* (рис. 1.36). Определить усилия, возникающие в болтах N_1 и прокладке N_2 при действии внутреннего давления p. Фланцы трубопровода и болты по сравнению с резиновой прокладкой весьма жестки, податливостью резьбы пренебречь. Дано: податливость прокладки и фланцев $\delta_2 = \left(\frac{l}{EF}\right)_2 = 0{,}125 \cdot 10^{-5}$ мм/Н, податливость болтов $\delta_1 = \left(\frac{l}{EF}\right)_1 = 0{,}125 \cdot 10^{-6}$ мм/Н, усилие затяжки в болтах и прокладке $N_0 = 80$ кН; равнодействующая сил давления в трубопроводе, растягивающая соединение, $P = 28$ кН.

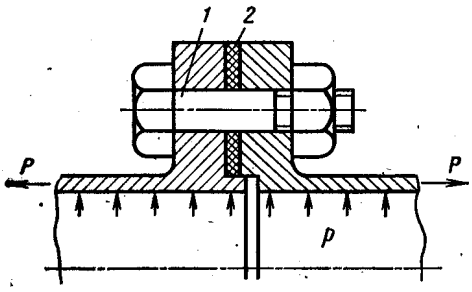


Рис. 1.36

1.42. Между крышкой *3* и цилиндром *4* двигателя внутреннего сгорания помещена тонкая медная прокладка *2* (рис. 1.37). Определить усилие N_1 в болтах *1*, создаваемое давлением p при вспышке топлива. Крышка, цилиндр и прокладка по сравнению с болтами

* После решения задач 1.40; 1.41 и 1.42 рекомендуется проанализировать особенности каждой конструкции, сравнив их между собой.

весьма жестки. Дано: податливость болтов $\left(\frac{l}{EF}\right)_1 = 0{,}25 \times 10^{-6}$ мм/Н; податливость системы крышка—цилиндр—прокладка $\left(\frac{l}{EF}\right)_2 = 0{,}156 \cdot 10^{-7}$ мм/Н; $p = 6{,}4$ МПа; $D = 100$ мм; усилие затяжки в болтах и прокладке $N_0 = 100$ кН.

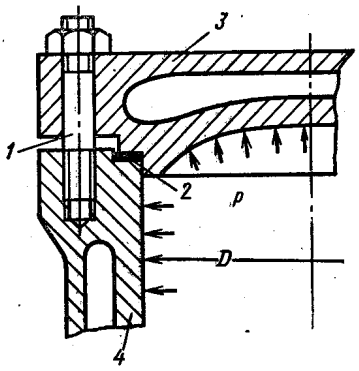


Рис. 1.37

1.43. Биметаллический стержень (рис. 1.38) нагружен силой P, приложенной в плоскости спая. Модуль упругости верхней части

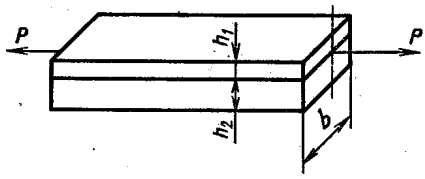


Рис. 1.38

стержня E_1, нижней E_2. Каково должно быть соотношение толщин h_1 и h_2 верхней и нижней частей стержня, чтобы он не искривлялся под действием силы P?

1.44. Для сборки двух стальных колец, разность диаметров посадочных поверхностей которых равна Δ, наружное кольцо нагревается и надевается на внутреннее. Определить наименьшую температуру нагрева, необходимую для сборки, и напряжения, возникающие в кольцах после охлаждения, если диаметр $D = 200$ мм; $\Delta = 0{,}2$ мм; толщина колец $h_1 = h_2 = 2$ мм; ширина $b_1 = b_2 = 4$ мм. При каком значении натяга Δ^* коэффициент запаса по текучести колец после сборки будет равен 2? Предел текучести материала $\sigma_{т.р} = 300$ МПа; $\sigma_{т.с} = 400$ МПа.

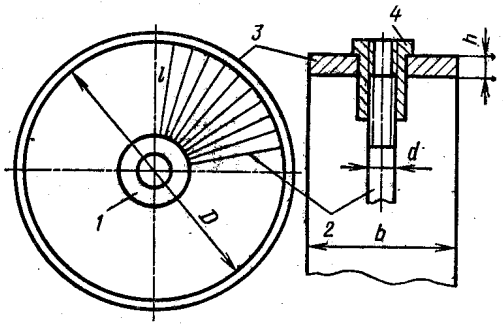


Рис. 1.39

1.45. Медное кольцо *1* плотно, но без натяжения, вставлено в стальное кольцо *2*. Определить напряжения, возникающие при нагреве конструкции на t °С. Дано: $D = 200$ мм; толщина колец $h_1 = 4$ мм; $h_2 = 2$ мм; ширина $b = 4$ мм; $t = 100°$ С.

1.46. Стальной обод *3* соединен со втулкой *1* при помощи 72 стальных спиц *2* (рис. 1.39). При сборке ниппельными гайками *4* создается натяг Δ. Определить возникающие при этом напряжения

в ободе колеса $\sigma_о$ и спицах $\sigma_с$. Втулку колеса считать абсолютно жесткой, усилия в спицах одинаковыми. Под натягом Δ следует понимать перемещение торца спицы по отношению к торцу гайки после того, как все зазоры закрыты. Нагрузка на обод при большом числе спиц практически эквивалентна равномерно распределенной. Дано: $D = 600$ мм; $b = 40$ мм; $h = 10$ мм; $d = 6$ мм; $l = 200$ мм; $\Delta = 0{,}5$ мм.

§ 4. РАСТЯЖЕНИЕ, СЖАТИЕ ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

1.47. Определить зависимость удлинения Δl бруса, изображенного на рис. 1.40, от интенсивности нагрузки q. Материал бруса упруго-пластичный; связь напряжения с деформацией при первичном нагружении описывается уравнением $\sigma = E\varepsilon - b\varepsilon^2$. Подсчитать работу внешних сил A и энергию упругой деформации $U_{упр}$. Определить остаточное удлинение бруса $\Delta l_{ост}$ после снятия нагрузки.

1.48. Построить характеристику составного бруса ABC, изображенного на рис. 1.41, *а*. Определить перемещение верхнего торца C при первичном нагружении силой $P_I = \frac{4}{3}\sigma_0 F$, разгрузке и вторичном нагружении силой $P_{II} = \sigma_0 F$. Подсчитать коэффициенты запаса по текучести $n_т$ и по разрушению $n_в$, считая нагрузку P_{II} рабочей. Величины l, F, σ_0, ε_0 считать известными. Характеристики материалов бруса на участках AB и BC вплоть до разрушения показаны на рис. 1.41, *б*. (Характеристикой конструкции называется зависимость перемещения точки приложения нагрузки от ее величины.)

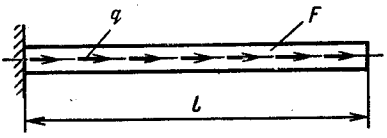


Рис. 1.40

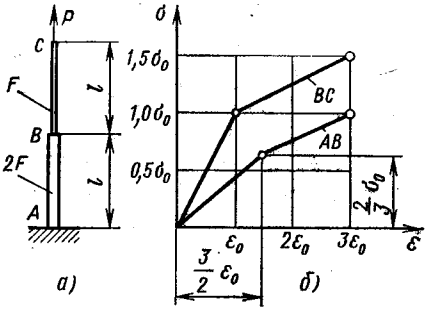


Рис. 1.41

1.49. Для систем, изображенных на рис. 1.42, определить силу $P_т$, при которой возникают первые пластические деформации, и предельную нагрузку $P_{пр}$. Подсчитать остаточные напряжения и перемещение сечения A, возникающие после приложения силы $P^* = \frac{1}{2}(P_т + P_{пр})$ и разгрузки. Характеристика материала стержней показана на рис. 1.42, *в*. Как изменится результат, если характеристика материала будет одинаковой при растяжении и сжатии (рис. 1.42, *г*)?

1.50. Для изображенных на рис. 1.43 конструкций определить предельную нагрузку. Задачу решить не раскрывая статической неопределимости, с помощью анализа возможных схем исчерпания

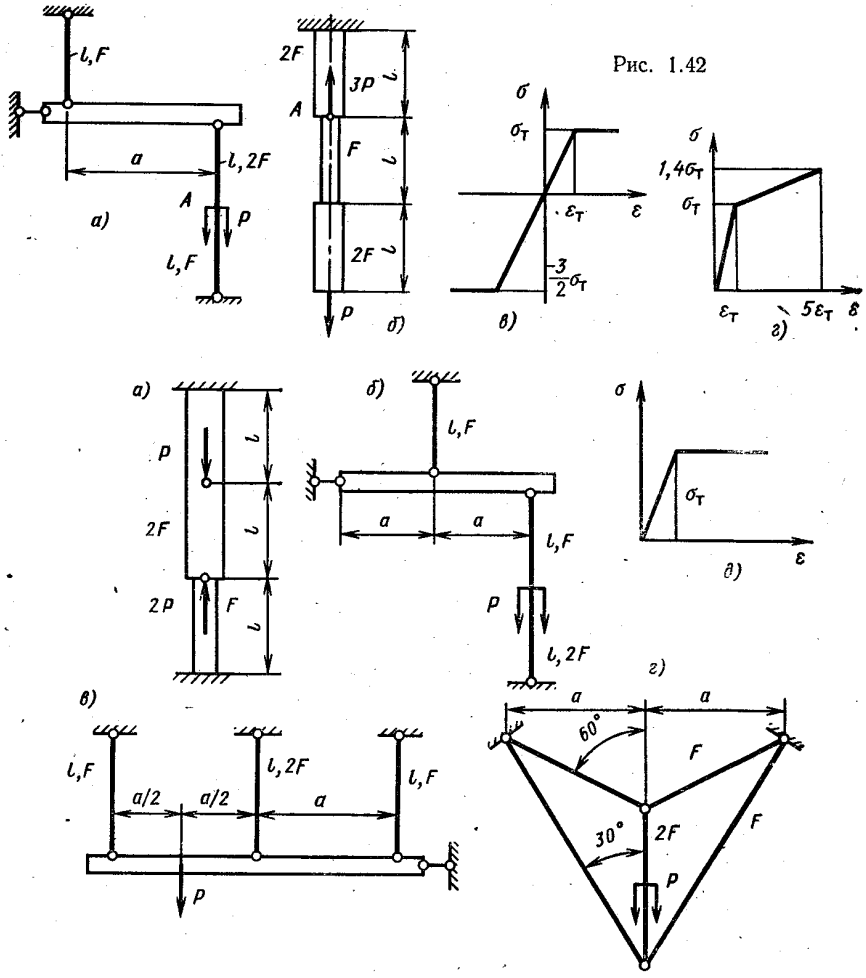


Рис. 1.42

Рис. 1.43

несущей способности. Материал стержней идеальный упруго-пластичный, одинаково сопротивляющийся растяжению и сжатию, характеристика его показана на рис. 1.43, *д*. Нагружение систем простое.

1.51. На основе качественного анализа работы конструкций, изображенных на рис. 1.44, установить знак остаточных напряже-

ний, возникающих при упруго-пластическом деформировании и разгрузке. Материал всех участков каждой конструкции одинаковый — идеальный упруго-пластичный, $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с}$.

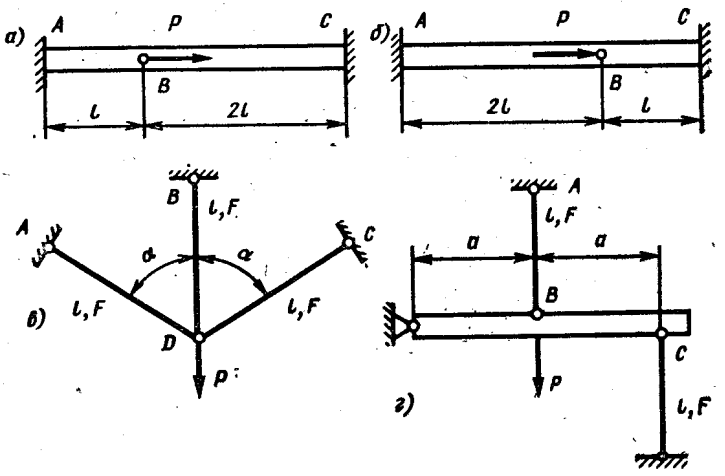


Рис. 1.44

1.52. Для конструкций, изображенных на рис. 1.45, определить перемещение сечения, в котором приложена нагрузка, при достижении ею предельного значения. Характеристика материала известна. Задачу решить, не вычисляя усилий в стержнях в зависимости от силы P.

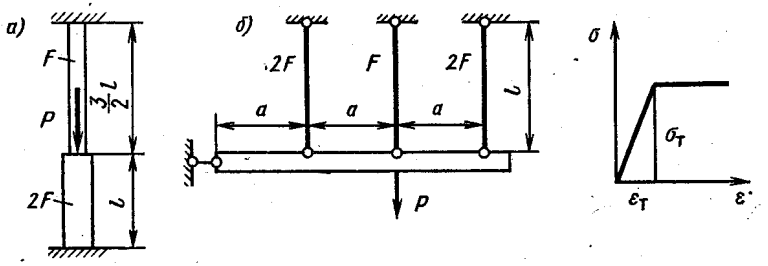


Рис. 1.45

1.53. Исследовать зависимость усилий, возникающих в поперечных сечениях конструкций, изображенных на рис. 1.46, *а* и *б*, и перемещения точки приложения нагрузки от ее величины при изменении последней от нуля до предельного значения. Определить остаточные усилия и перемещение сечения C при нагружении бруса предельной силой и разгрузке. Характеристика материала, одинаковая в области растяжения и сжатия, показана на рис. 1.46.

1.54. Определить остаточные напряжения, возникающие в брусе AB (рис. 1.47, *а*) при нагружении его силами $P = \frac{11}{8}\sigma_т F$ и разгрузке (при нагружении и разгрузке обе внешние силы изменяются одновременно, пропорционально некоторому параметру). Характеристика материала бруса показана на рис. 1.47, *б*.

1.55. Определить остаточное перемещение $\delta_{ост}$ сечения A (рис. 1.48) при нагружении конструкции силой $P = \frac{5}{3}\sigma_т F$ и разгрузке ($\sigma_т$ — предел текучести материала стержней; F — площадь поперечного сечения каждого стержня). Материал стержней идеальный

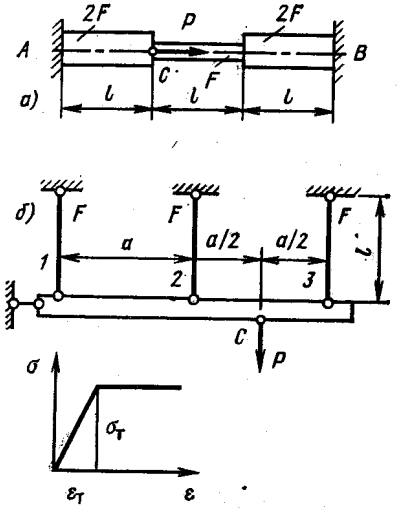


Рис. 1.46

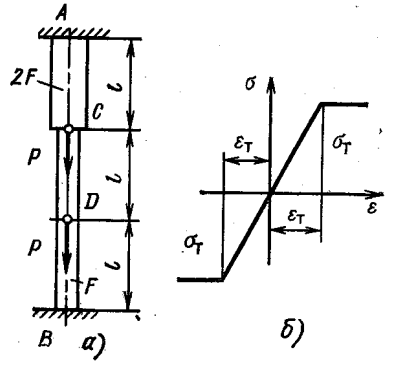


Рис. 1.47

упруго-пластичный, одинаково сопротивляющийся растяжению и сжатию.

1.56. После выбора зазоров в соединении болт—трубка (рис. 1.49) гайка затягивается так, что ее смещение по отношению к свободному торцу болта равно $\Delta_{зат}$. Определить коэффициент запаса n конструкции по предельной нагрузке при нагружении болта растягивающей силой P. Предельное состояние в данном случае — либо пластическое деформирование болта, либо нарушение контакта между болтом и трубкой. Материал болта и трубки считать идеальным упруго-пластичным, податливостью резьбы пренебречь.

Дано: $\Delta_{зат} = 0{,}3$ мм; $P = 19{,}2$ кН; $l = 100$ мм. Болт: материал — сталь; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\sigma_{т.р} = 382$ МПа; $d_1 = 10$ мм. Трубка: материал — медь, $E = 1 \cdot 10^5$ МПа; $\sigma_{т.с} = 100$ МПа; $D_1 = 11$ мм; $D_2 = 18$ мм.

1.57. Брус сжат так, что в его поперечном сечении возникло напряжение $\sigma_0 < \sigma_т$. Затем он помещен между совершенно жесткими опорами A и B (рис. 1.50, *а*). На какую минимальную темпе-

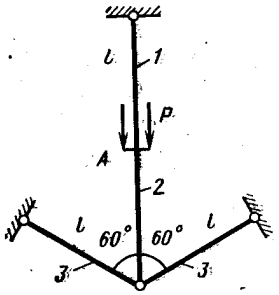


Рис. 1.48

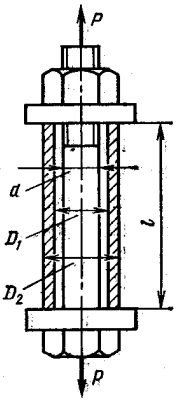


Рис. 1.49

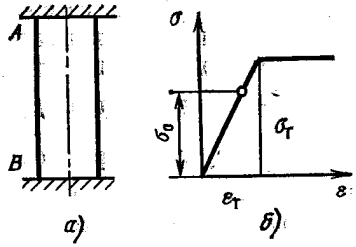


Рис. 1.50

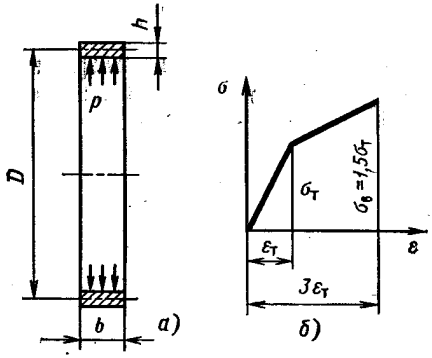


Рис. 1.51

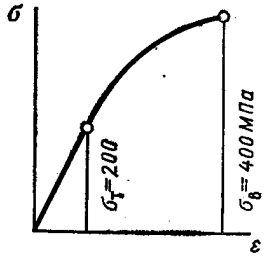
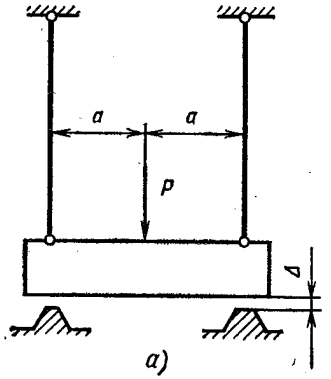


Рис. 1.52



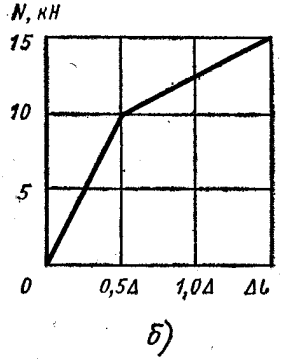


Рис. 1.53

ратуру нужно нагреть брус, чтобы после остывания до начальной температуры его можно было свободно вынуть из опор. Характеристика материала бруса изображена на рис. 1.50, *б*. Температурный коэффициент линейного расширения α, модуль упругости E материала бруса известны.

1.58. Построить характеристику тонкостенного кольца (рис. 1.51, *а*), нагруженного внутренним давлением (под характеристикой кольца понимается зависимость изменения его диаметра ΔD от давления p). Определить изменение диаметра кольца ΔD_1 при нагружении давлением $p_1 = 3\sigma_т \frac{h}{D}$ и $\Delta D_{ост}$ после разгрузки, а также ΔD_2 при вторичном нагружении давлением $p_2 = 2{,}5\sigma_т \frac{h}{D}$. Характеристика материала кольца показана на рис. 1.51, *б*.

1.59. Тонкостенное кольцо вращается с постоянной окружной скоростью $v = \omega D/2 = 100$ м/с. Вычислить коэффициенты запаса по текучести и по разрушению. Характеристика материала при растяжении дана на рис. 1.52. Плотность $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

1.60. Весьма жесткая плита, весом которой можно пренебречь, подвешена на двух тягах и нагружена силой P (рис. 1.53, *а*). На рис. 1.53, *б* дана характеристика тяг вплоть до разрушения. Определить коэффициент запаса по разрушению конструкции, если а) $P = 20$ кН; б) $P = 27$ кН.

ГЛАВА 2

ИЗГИБ БРУСА

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ПРИ ИЗГИБЕ

2.01. Для балок, изображенных на рис. 2.01, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Изобразить примерный вид оси изогнутой балки.

2.02. Для плоских рам, изображенных на рис. 2.02, построить эпюры изгибающих моментов.

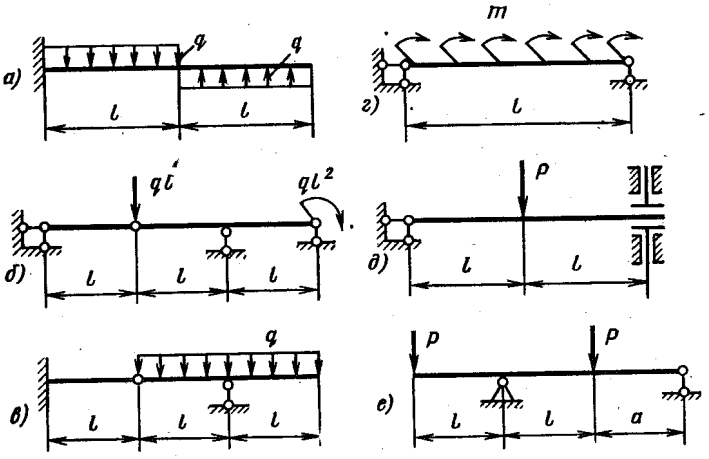


Рис. 2.01

2.03. Изобразить вид оси изогнутой балки AB, нагруженной так, как показано на рис. 2.03, для различных вариантов ее закрепления.

2.04. Определить положение тележки (расстояние z_*), при котором изгибающий момент в балке (рис. 2.04) максимален $\left(a = \frac{l}{4}\right)$.

2.05. Определить положение опоры C балки AB (рис. 2.05), при котором наибольшие по абсолютной величине отрицательный и положительный изгибающие моменты будут одинаковы (размер l задан).

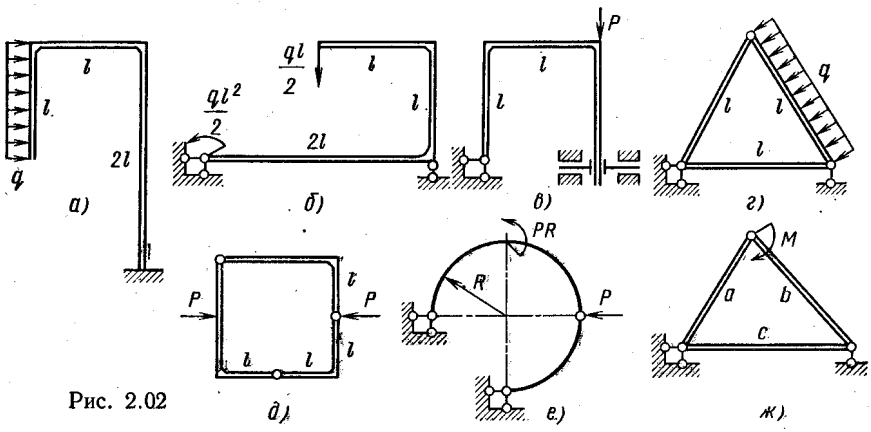


Рис. 2.02

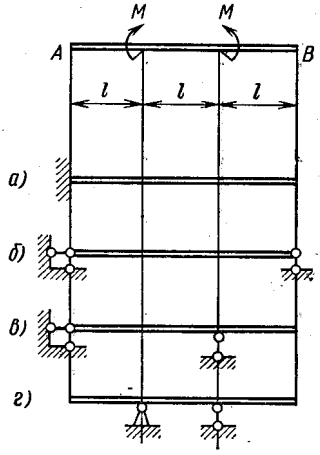


Рис. 2.03

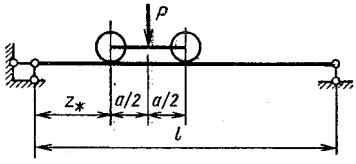


Рис. 2.04

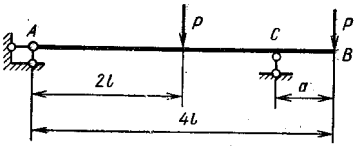


Рис. 2.05

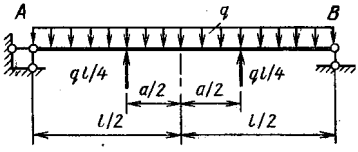


Рис. 2.06

2.06. Определить величину a, при которой экстремальные значения изгибающих моментов в балке AB (рис. 2.06) будут одинаковы.

§ 2. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК И ПЛОСКИХ РАМ В ПРЕДЕЛАХ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ

2.07. Определить размеры поперечных сечений балки AB, изображенной на рис. 2.07, если $M = 10^4$ Н·м; $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} =$ $= 300$ МПа; $n_т = 3$. Сравнить расход материала, приняв за единицу двутавровое сечение.

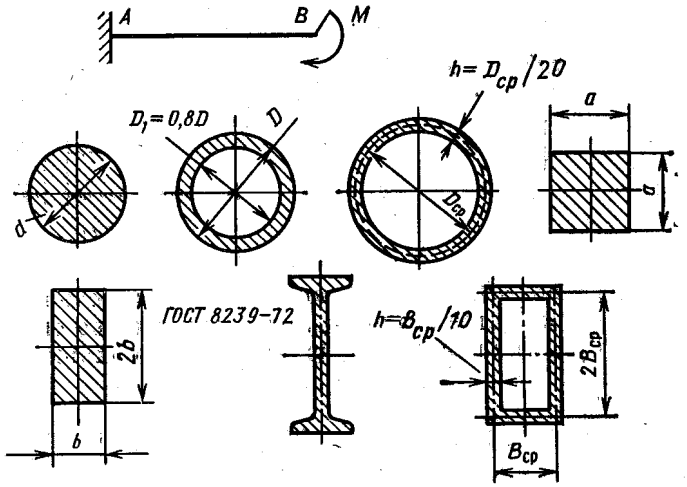


Рис. 2.07

2.08. В какой из балок, изображенных на рис. 2.08, при одинаковом перемещении свободного конца максимальное напряжение больше?

2.09. Какую форму следует предварительно придать оси бруса на участке AB, чтобы при нагружении его силами P, как показано на рис. 2.09, этот участок стал прямолинейным? Жесткость бруса при изгибе EI.

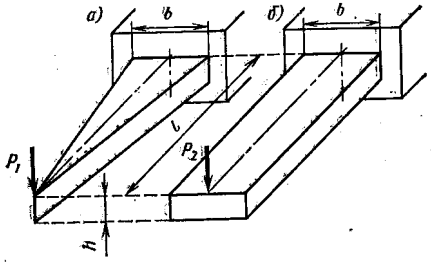


Рис. 2.08

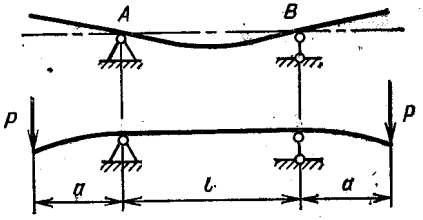


Рис. 2.09

2.10. Как изменятся прочность и жесткость балки квадратного поперечного сечения (рис. 2.10), если ее из положения $а$ повернуть в положение $б$?

2.11. Определить закон изменения ширины b от координаты z балки, изображенной на рис. 2.11, при котором продольная деформация не зависит от z. Какова при этом будет форма оси изогнутой балки?

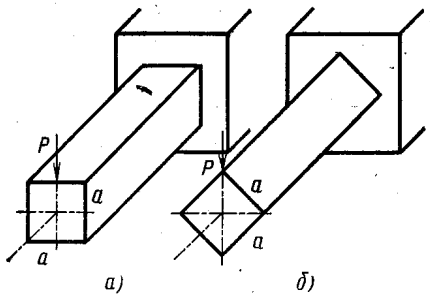


Рис. 2.10

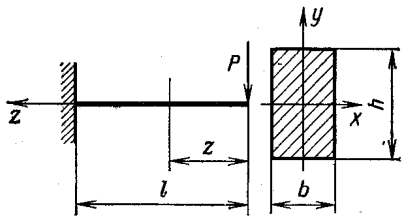


Рис. 2.11

2.12. Стержень AB (рис. 2.12) постоянного поперечного сечения используется в качестве эталона длины, для чего на его верхней поверхности близко к концам под прямым углом к длинной стороне

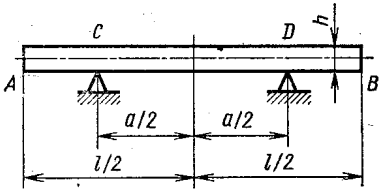


Рис. 2.12

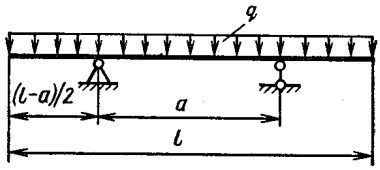


Рис. 2.13

нанесены параллельные прямые линии. Как расположить опоры C и D, чтобы расстояние между этими линиями, измеренное по поверхности стержня, не изменилось под действием веса?

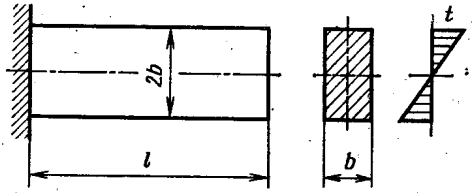


Рис. 2.14

2.13. Для балки постоянного поперечного сечения, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 2.13), определить оптимальное расстояние между опорами; 1) из условия наибольшей прочности (характеристики материала при растяжении и сжатии одинаковы, сечение балки имеет две оси симметрии); 2) из условия наибольшей жесткости.

2.14. Консольная балка прямоугольного поперечного сечения (рис. 2.14) неравномерно нагрета по высоте (закон изменения температуры задан). Определить вертикальное перемещение δ свобод-

ного конца балки. Коэффициент линейного расширения материала балки α, модуль упругости E.

2.15. Определить размер l из условия равнопрочности стержня AB и балки CD (рис. 2.15). Подсчитать перемещение δ сечения D.

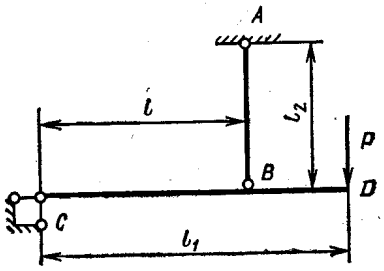


Рис. 2.15

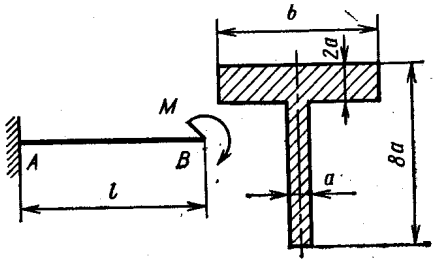


Рис. 2.16

Дано: $P = 5$ кН; $l_1 = 1$ м; $l_2 = 0{,}5$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\sigma_{т\,AB} = 400$ МПа; $\sigma_{т\,CD} = 200$ МПа; стержень AB — пруток; $d = 8$ мм; балка CD — тонкостенная труба; $D_{ср} = 80$ мм; $h = 4$ мм.

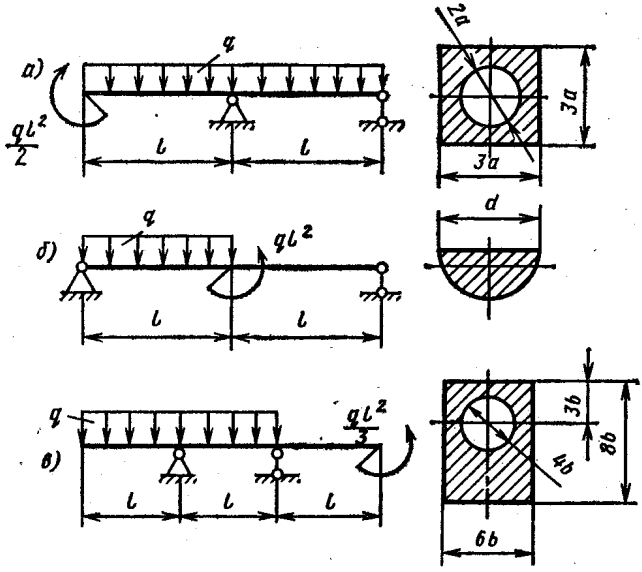


Рис. 2.17

2.16. Консольная балка AB нагружена парой сил, приложенной к ее свободному концу (рис. 2.16). Определить оптимальную из условия прочности ширину полки b, если предел текучести материала балки при сжатии в 3 раза больше предела текучести при растяжении.

2.17. Определить из условия прочности размеры поперечных сечений балок, изображенных на рис. 2.17. Дано: $q = 5$ кН/м; $l = 0{,}2$ м; $[\sigma] = 200$ МПа; $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с}$.

2.18. Определить из условия прочности размер a поперечного сечения балки, изображенной на рис. 2.18, если $P = 10$ кН; $l = 1$ м; $[\sigma]_р = 60$ МПа; $[\sigma]_с = 100$ МПа. Выяснить, как рациональнее расположить балку, полкой вверх или вниз?

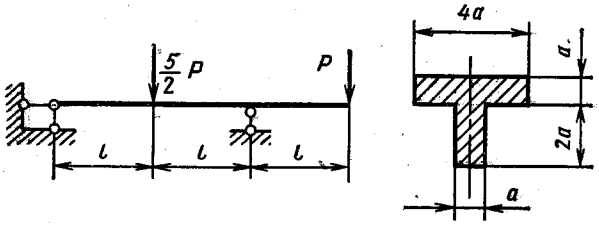


Рис. 2.18

2.19. Какую силу P надо приложить к свободному концу балки AB, нагруженной собственным весом (рис. 2.19), чтобы суммарное перемещение сечения B было равно нулю. Погонный вес балки q, изгибная жесткость EI и длина l известны.

2.20. Для балок, изображенных на рис. 2.20, находящихся в условиях прямого изгиба, определить (в общем виде) перемещение v сечения K и угол поворота θ сечения B. Задачу решить методом Мора—Верещагина.

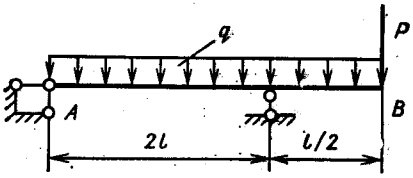


Рис. 2.19

2.21. Для плоских рам, изображенных на рис. 2.21, находящихся в условиях прямого изгиба, определить (в общем виде) перемещения сечений K: *а* — вертикальное, *б* — угловое, *в* и *г* — горизонтальное.

2.22. Для плоских рам, изображенных на рис. 2.22, находящихся в условиях прямого изгиба, определить (в общем виде) перемещения сечений K: *а* — полное; *б* — горизонтальное; *в* — угловое; *г* — вертикальное.

2.23. Подсчитать работу нагрузок при деформации балки, изображенной на рис. 2.23. Изгибная жесткость балки EI. Проверить полученный результат, вычислив потенциальную энергию деформации по значениям внутренних изгибающих моментов.

2.24. Сравнить напряжения и наибольшие прогибы, возникающие в одинаковых балках (рис. 2.24) при нагреве их верхней грани на t °С. Температура по толщине балки меняется по линейному закону. Температурный коэффициент линейного расширения материала α, модуль упругости E.

2.25. Упругий брус AC лежит на совершенно жесткой опоре AB (рис. 2.25). Погонный вес бруса q, изгибная жесткость EI. Исследовать форму оси изогнутого бруса в зависимости от соотношения длин l и b.

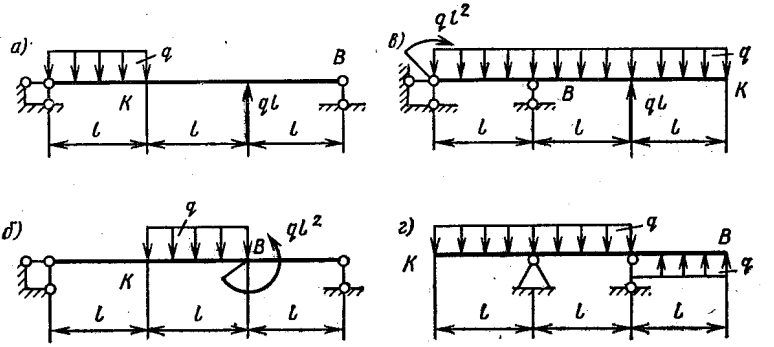


Рис. 2.20

2.26. При каком соотношении моментов инерции I_1 и I_2 участков AB и BC стальной балки, изображенной на рис. 2.26, максимальное перемещение будет иметь место в сечении, где приложена нагрузка P? Найти это перемещение δ, если $P = 6250$ Н, $l = 0{,}24$ м, $I_1 = 16 \cdot 10^{-8}$ м^4.

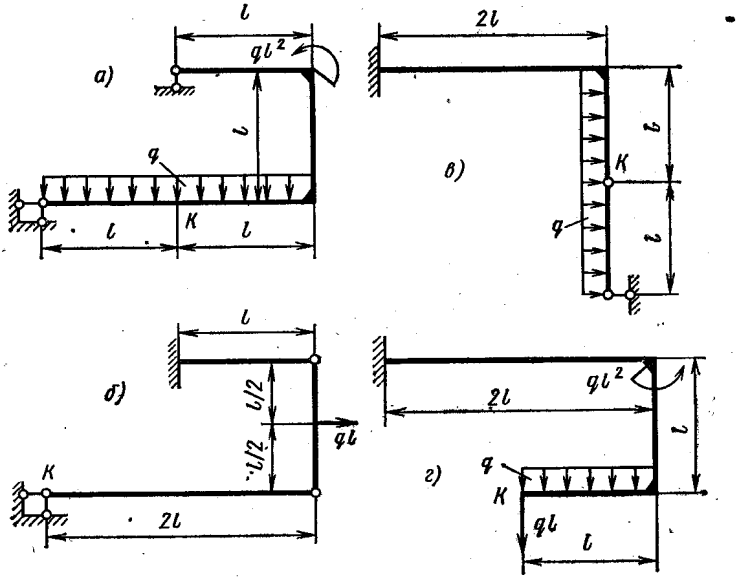


Рис. 2.21

2.27. На каком расстоянии a от средней опоры (рис. 2.27) нужно приложить момент M, чтобы балка на левом пролете оставалась прямой? Изгибная жесткость балки постоянна.

2.28. Рессора AB (рис. 2.28, *а*) состоит из трех полос шириной b и толщиной h. Пренебрегая трением между полосами, определить зависимость наибольшего прогиба от нагрузки P. Выяснить закон

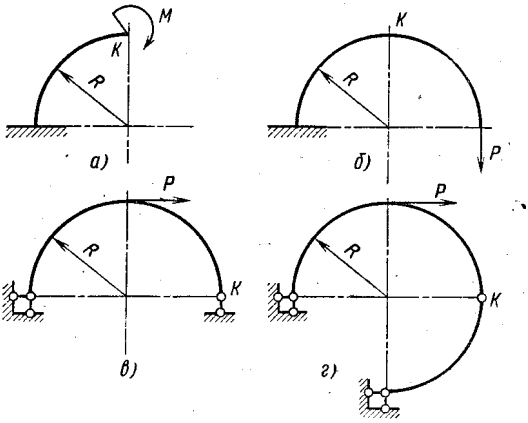


Рис. 2.22

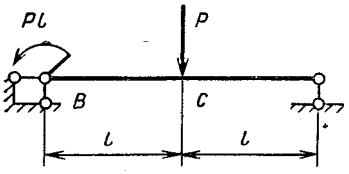


Рис. 2.23

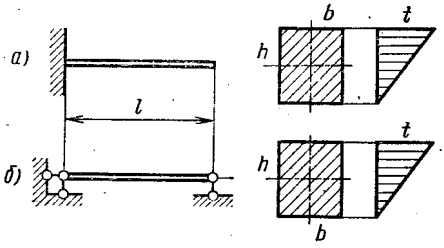


Рис. 2.24

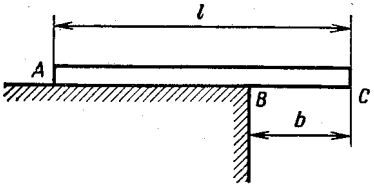


Рис. 2.25

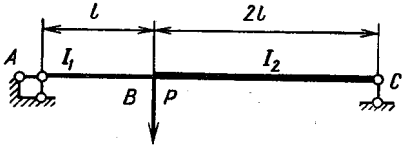


Рис. 2.26

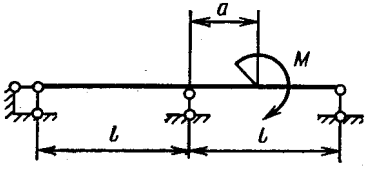


Рис. 2.27

изменения напряжений в поперечных сечениях полос (полосы рессоры, мысленно разрезанные вдоль и помещенные в одну плоскость, образуют в плане фигуру $ADBC$, показанную на рис. 2.28, *б*).

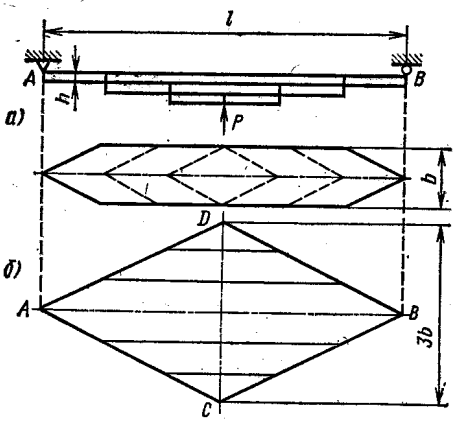


Рис. 2.28

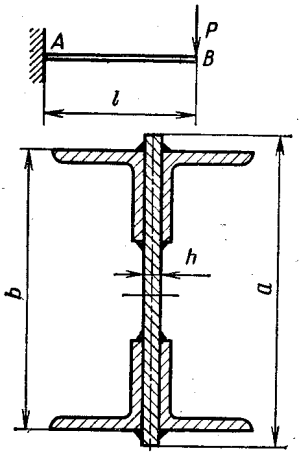


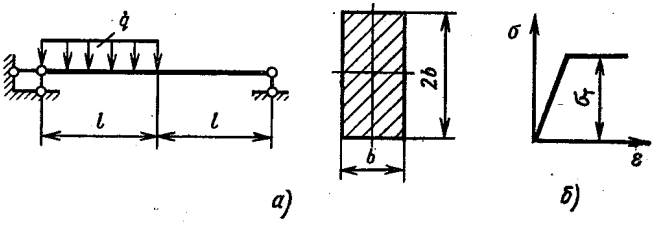
Рис. 2.29

2.29. Двутавровая балка AB (рис. 2.29) сварена из полосы и четырех уголков 50×50×5 (СТ СЭВ 104—74). Определить силу T, стремящуюся сдвинуть уголок по отношению к балке при изгибе ее силой $P = 10$ кН. Дано: $l = 1{,}5$ м; $a = 160$ мм; $b = 150$ мм; $h = 8$ мм.

§ 3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК И ПЛОСКИХ РАМ ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

2.30. Для балки, изображенной на рис. 2.30, *а*, вычислить интенсивность внешних сил $q_т$, при которой возникают первые пластические деформации, и $q_{пр}$, при которой исчерпывается несу-

Рис. 2.30



щая способность балки. Определить границу упругой зоны по длине балки при $q_0 = \frac{5}{4} q_т$. Характеристика материала показана на рис. 2.30, *б*. Размеры балки и предел текучести $\sigma_т$ считать известными.

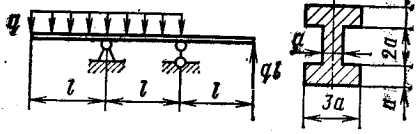


Рис. 2.31

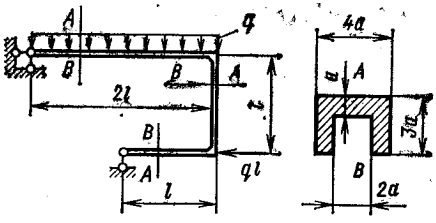


Рис. 2.32

2.31. Определить интенсивность внешней нагрузки q_0, при которой высота упругого ядра в наиболее нагруженном сечении балки, изображенной на рис. 2.31, равна $2a$. Построить эпюру остаточных напряжений в этом сечении после разгрузки. Материал балки идеальный упруго-пластичный, $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с}$. Размеры балки и предел текучести считать известными.

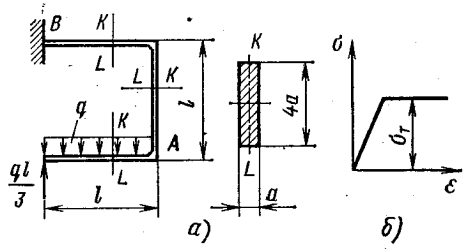


Рис. 2.33

2.82. Для рамы, изображенной на рис. 2.32, определить интенсивность внешних сил $q_т$, при которой возникают первые пластические деформации, и $q_{пр}$, при которой исчерпывается несущая способность рамы. Материал идеальный упруго-пластичный; предел текучести $\sigma_т$ и размеры балки считать известными.

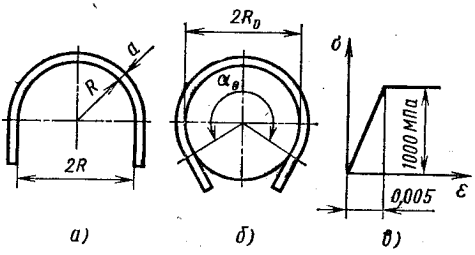


Рис. 2.34

2.33. Построить эпюры остаточных напряжений в сечениях A и B рамы, изображенной на рис. 2.33, *а*, при нагружении ее предельной нагрузкой $q_{пр}$ и разгрузке. Размеры рамы считать известными. Характеристика материала показана на рис. 2.33, *б*.

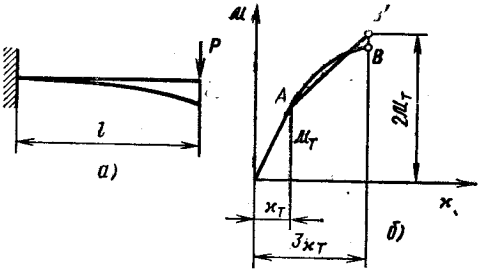


Рис. 2.35

2.34. Из отрезка прямой проволоки квадратного сечения требуется изготовить пружину, изображенную на рис. 2.34, *а*. Определить необходимый для этого радиус оправки R_0 и угол контакта

заготовки с оправкой α_0 (рис. 2.34, *б*). Дано: $R = 100$ мм, $a = 5$ мм. Характеристика материала показана на рис. 2.34, *в*.

2.35. Брус, изображенный на рис. 2.35, *а*, изгибается силой $P = 2\mathscr{M}_T/l$. Вычислить наибольший прогиб v, если зависимость между изгибающими моментами и кривизной задана (рис. 2.35, *б*).

Указание. Для удобства вычислений криволинейный участок характеристики бруса можно заменить отрезком прямой AB'.

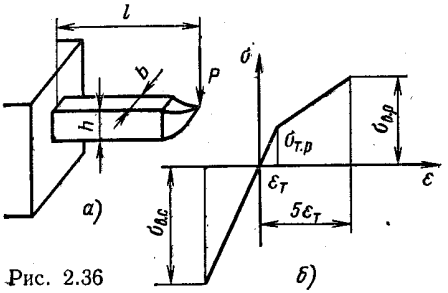


Рис. 2.36

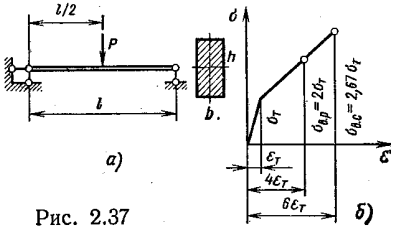


Рис. 2.37

2.36. Резец специального назначения (рис. 2.36, *а*) выполнен из стали Р18, закаленной до твердости *HRC* 62. Усилие резания $P = 2$ кН. Определить коэффициент запаса по разрушению $n_в$, если $l = 80$ мм; $h = 20$ мм; $b = 10$ мм; характеристика материала приведена на рис. 2.36, *б*; $\sigma_{в.р} = 2000$ МПа; $\sigma_{т.р} = 800$ МПа; $\sigma_{в.с} = 3200$ МПа; $\varepsilon_т = 4 \cdot 10^{-3}$.

2.37. Определить коэффициенты запаса по текучести $n_т$ и по разрушению $n_в$ балки (рис. 2.37, *а*), нагруженной силой P. Материал хрупкий, его совмещенная характеристика при растяжении и сжатии показана на рис. 2.37, *б*. Дано: $l = 1$ м; $b = 30$ мм; $h = 60$ мм; $P = 11{,}5$ кН; $\sigma_т = 200$ МПа; $\varepsilon_т = 10^{-3}$.

§ 4. КОСОЙ ИЗГИБ И ВНЕЦЕНТРЕННОЕ НАГРУЖЕНИЕ ПРЯМЫХ БРУСЬЕВ

2.38. Определить наибольшее нормальное напряжение и перемещение свободного конца стальной балки, изображенной на рис. 2.38. В случае *а* решение выполнить в общем виде, в случае *б* принять: $M = 400$ Н·м; $l = 1$ м; уголок неравнобокий: $75 \times 50 \times 5$ (СТ СЭВ 255—76).

2.39. Определить наибольшие напряжения в сечениях A и B балки CD (рис. 2.39). Балка выполнена из треугольной трубы. Дано $P = 500$ Н; $l = 0{,}35$ м; $a = 56$ мм; $b = 73$ мм; $H = 36{,}5$ мм; $R = 6$ мм; $c = 4$ мм; $y_0 = 12{,}1$ мм; $I_x = 6{,}15$ см^4; $I_y = 12{,}9$ см^4.

2.40. Даны эпюры изгибающих моментов в плоскостях zx и zy (рис. 2.40). Определить закон изменения наибольшего напряжения по длине балки, если ее поперечное сечение типа *а* или типа *б*.

2.41. Брус, изображенный на рис. 2.41, нагружен силой P, направленной вдоль его оси. Определить наибольшее напряжение, возникающее в брусе.

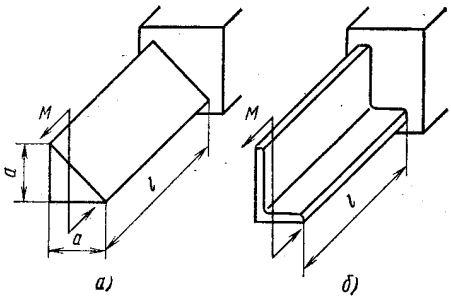


Рис. 2.38

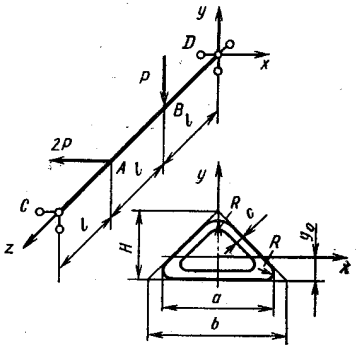


Рис. 2.39

2.42. Брус (рис. 2.42), представляющий собой отрезок двутавровой балки № 10 (ГОСТ 8239—72), нагружен по торцам сжимающими силами, равнодействующая которых P проходит через точку с координатами x_0, y_0. Вычислить наибольшее напряжение, возникающее в брусе, если $P = 20$ кН; $x_0 = 20$ мм; $y_0 = -40$ мм.

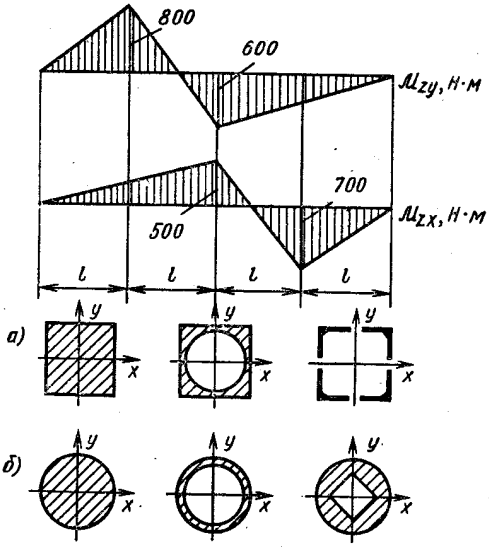


Рис. 2.40

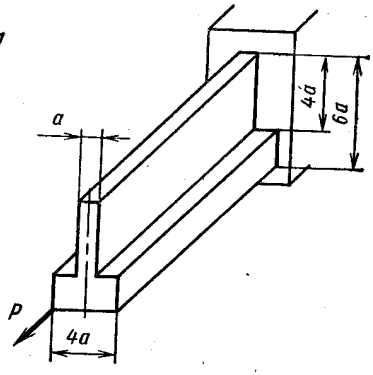


Рис. 2.41

2.43. Определить наибольшее напряжение σ_{max} и взаимный угол поворота θ торцовых сечений растянутого бруса, изображенного на рис. 2.43. Принять $l = 10b$.

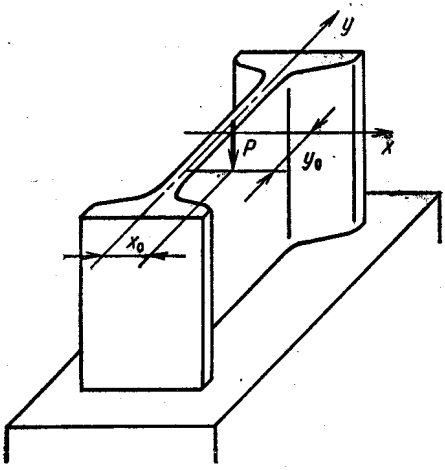


Рис. 2.42

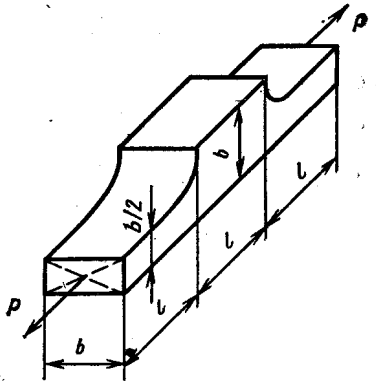


Рис. 2.43

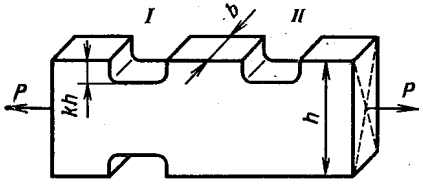


Рис. 2.44

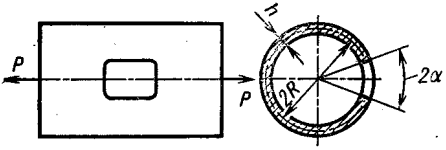


Рис. 2.45

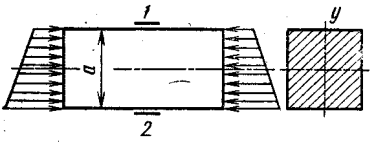


Рис. 2.46

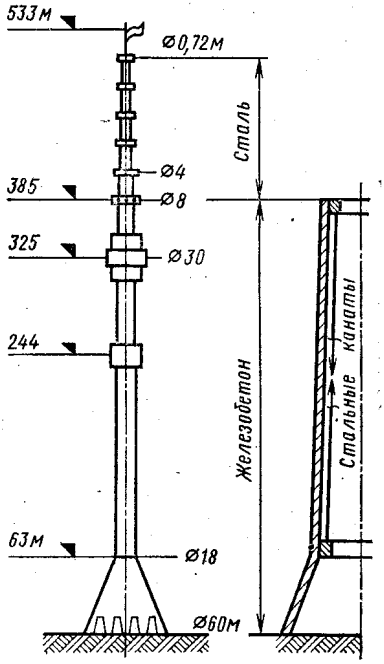


Рис. 2.47

2.44. При каком значении коэффициента k, не равном нулю, в растянутом брусе, изображенном на рис. 2.44, сечения участка *I* будут равнопрочны сечениям участка *II*?

2.45. В трубе, нагруженной растягивающими силами P, необходимо вырезать окно (рис. 2.45). Как изменятся при этом напряжения? Что можно предпринять для уменьшения напряженности детали? Дано: $R_{ср} = 100$ мм; $h = 10$ мм; $P = 1{,}25$ МН; $\alpha = 30°$.

2.46. Брус сжат торцовыми силами, симметричными относительно оси y (рис. 2.46). С помощью тензодатчиков *1* и *2* измерены продольные деформации наружных слоев $\varepsilon_1 = -3 \cdot 10^{-4}$ и $\varepsilon_2 = -9 \cdot 10^{-4}$. Найти радиус кривизны оси деформированного бруса, если $a = 60$ мм.

2.47. Для постройки заводской кирпичной трубы предложены две партии равнопрочного кирпича: более тяжелый и менее тяжелый. Какой кирпич следует предпочесть?

2.48. Останкинская телевизионная башня является самой высокой в мире свободностоящей башней. Нижняя часть башни до высоты 385 м выполнена из железобетона. Верхняя часть, до высоты 533 м, составлена из отрезков стальных труб различных диаметров (рис. 2.47).

Особенностью конструкции башни является наличие системы 132 стальных канатов, которые закреплены в верхней и нижней частях железобетонной конструкции башни. Канаты при монтаже натянуты при помощи специальных домкратов. Общее растягивающее усилие во всех канатах достигает примерно 100 МН (10 000 тс). Вес башни около 320 МН (32 000 тс). Объяснить, какова роль натянутых канатов?

§ 5. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

2.49. Для балки, изображенной на рис. 2.48, построить эпюру внутренних изгибающих моментов, нарисовать форму изогнутой оси, определить перемещение v среднего сечения балки. Изгибная жесткость EI_x постоянна.

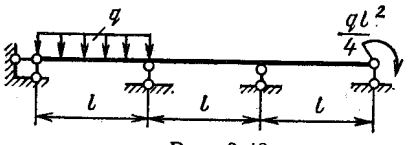


Рис. 2.48

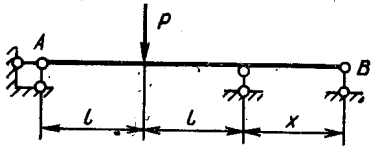


Рис. 2.49

2.50. При каком значении x коэффициент запаса трехопорной балки AB (рис. 2.49) наибольший? Балка находится в условиях прямого изгиба, поперечное сечение постоянно, материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию.

2.51. Доказать, что при любой нагрузке на консольной части балки ABC (рис. 2.50) внутренний изгибающий момент в сечении A равен по модулю половине момента в сечении B, если пролет AB свободен от внешних нагрузок.

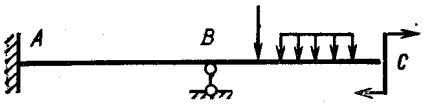


Рис. 2.50

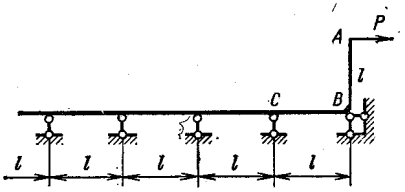


Рис. 2.51

2.52. Определить горизонтальное перемещение δ сечения A конструкции (рис. 2.51), имеющей бесконечное число одинаковых пролетов. Жесткость бруса при изгибе EI.

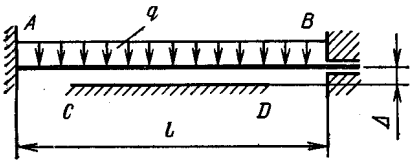


Рис. 2.52

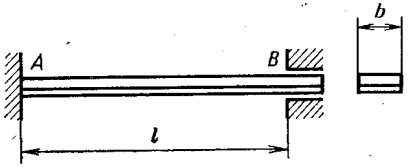


Рис. 2.53

2.53. Между балкой AB и жесткой опорой CD в ненагруженном состоянии имеется зазор Δ (рис. 2.52). Исследовать форму оси изогнутой балки при действии равномерно распределенной нагрузки в зависимости от ее интенсивности q. Жесткость балки EI.

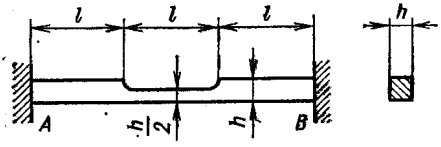


Рис. 2.54

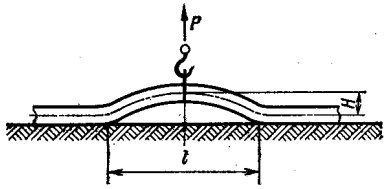


Рис. 2.55

2.54. Биметаллическая пластина AB (сталь—медь) защемлена одним концом и имеет скользящее щелевое закрепление на другом конце (рис. 2.53). Определить напряжения, возникающие в пластине, при нагревании ее на $t = 100$ °С. Изобразить форму оси пластины после нагрева. Толщина стальной части 1,414 мм, медной — 2 мм. Трением в опоре пренебречь.

2.55. Ступенчатый брус AB (рис. 2.54) закреплен между двумя жесткими опорами. Определить напряжения, возникающие в брусе, при равномерном нагреве его на t °С. Температурный коэффициент линейного расширения материала бруса α, модуль упругости E.

2.56. Стальная труба газопровода (рис. 2.55) диаметром $D =$ $= 500$ мм с толщиной стенки $h = 10$ мм, свободно лежащая на земле, приподнимается краном на высоту $H = 100$ мм. Считая, что

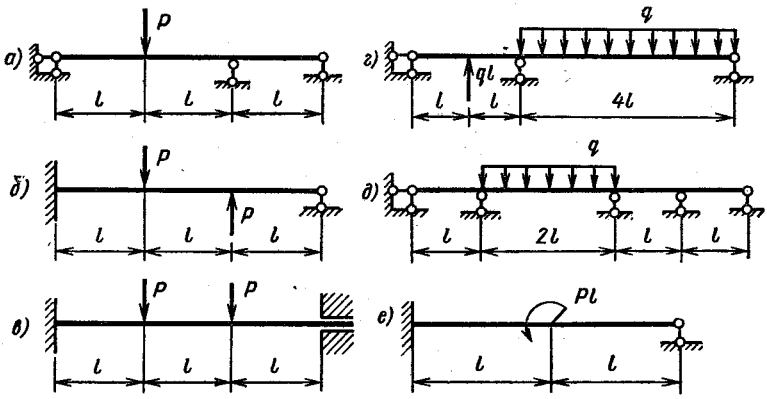


Рис. 2.56

труба имеет бесконечную длину, а ее основание абсолютно жесткое, определить длину l приподнятой части трубопровода и силу P, необходимую для приподнимания трубы.

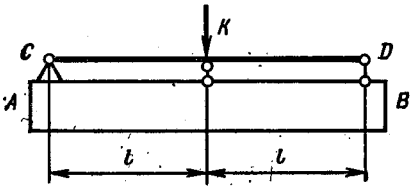


Рис. 2.57

2.57. Для балок, изображенных на рис. 2.56, определить предельную внешнюю нагрузку, считая внутренний предельный момент $\mathcal{M}_{пр}$ известным.

2.58. Жесткий брус AB (рис. 2.57) с укрепленной на нем стальной трубчатой балочкой CD движется в направлении K с ускорением $j = 50g$ (g — ускорение свободного падения). Определить коэффициент запаса по текучести балочки, если диаметр трубки $d = 20$ мм; толщина стенки $h = 2$ мм; $l = 500$ мм; $\sigma_{т.р} =$ $= \sigma_{т.с} = 200$ МПа.

§ 6. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ПЛОСКИХ РАМ

2.59. Определить положение опоры A рамы, изображенной на рис. 2.58, при котором реакция этой опоры минимальна.

2.60. Шарнир A (рис. 2.59) может передавать усилие $Q =$ $= 40$ кН. Полагая $P = 20$ кН и $l = 0{,}5$ м, определить наименьший размер a, при котором обеспечивается прочность шарнирного соединения A. Изгибная жесткость стержней рамы одинакова.

2.61. Для рамы, изображенной на рис. 2.60, построить эпюру изгибающих моментов, не решая канонических уравнений метода сил. Объяснить, как выполнено построение.

2.62. Стальная пружина, имеющая форму П-образной рамы (рис. 2.61), ставится на рабочее место с натягом Δ. Определить

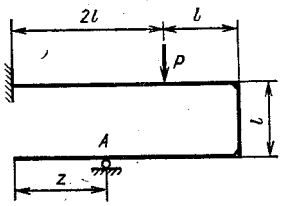


Рис. 2.58

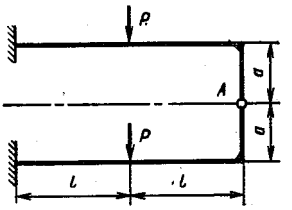


Рис. 2.59

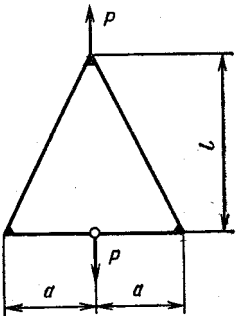


Рис. 2.60

усилие R, возникающее в шарнире A, и коэффициент запаса по текучести рамы после сборки. Дано: $l = 100$ мм; $b = 10$ мм; $h = 2$ мм; $\Delta = 0{,}1l$; $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 1000$ МПа.

2.63. На участке медного трубопровода с жестко заделанными фланцами A и B (рис. 2.62) температура изменяется на $t = 100$ °С.

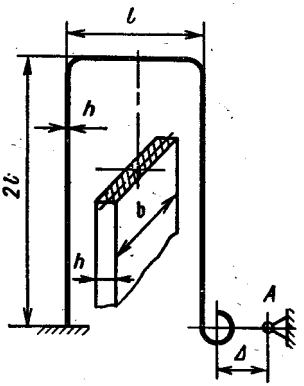


Рис. 2.61

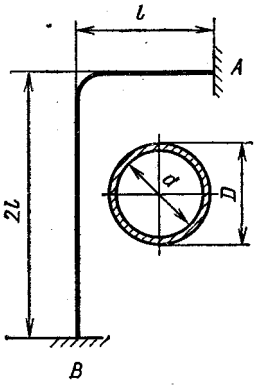


Рис. 2.62

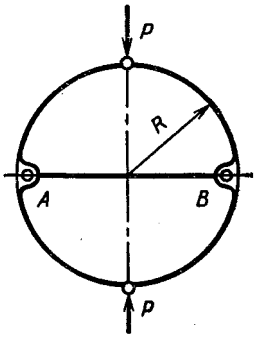


Рис. 2.63

Определить наибольшее напряжение, возникающее в трубопроводе. Наружный диаметр трубы $D = 20$ мм, внутренний $d = 14$ мм; $l = 200$ мм.

2.64. Стальное кольцо, выполненное из тонкостенной трубы, стянуто стальной тягой AB (рис. 2.63). Определить наибольшие напряжения, возникающие в кольце и тяге при действии сил P. Дано: диаметр трубы $D_{ср} = 20$ мм; толщина стенки $h = 1$ мм; радиус кольца $R = 200$ мм; диаметр тяги $d = 2$ мм; $P = 500$ Н.

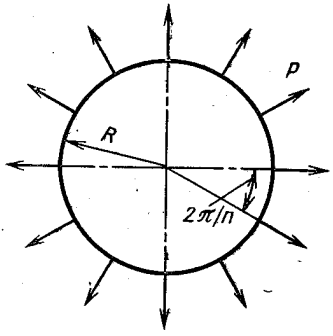


Рис. 2.64.

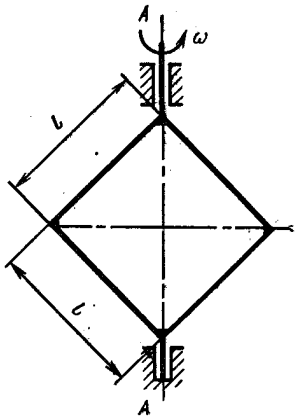


Рис. 2.65

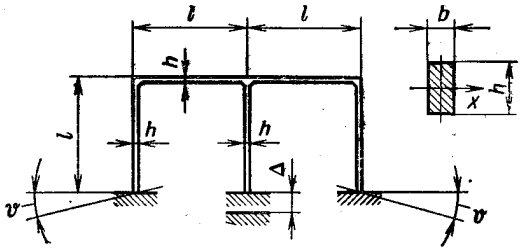


Рис. 2.66

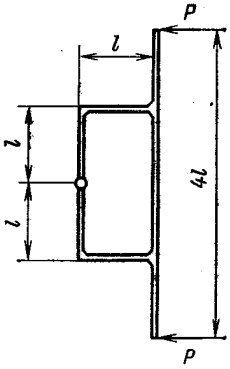


Рис. 2.67

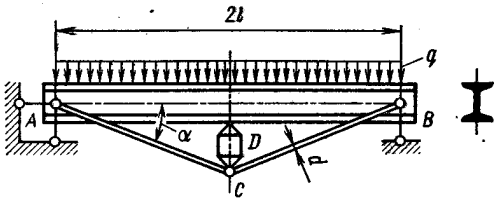


Рис. 2.68

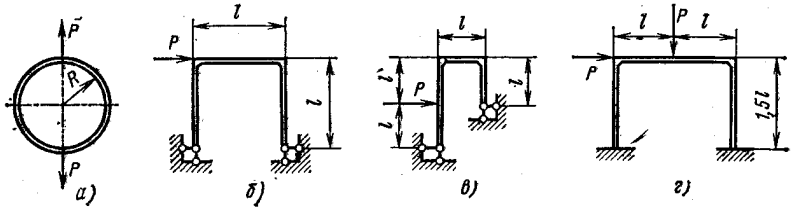


Рис. 2.69

2.65. Кольцо малой кривизны нагружено n радиальными силами P, равномерно распределенными по окружности (рис. 2.64). Определить наибольшее напряжение, возникающее в поперечном сечении кольца. Исследовать полученный результат при $n \to \infty$, считая $P = p2\pi R/n$, где p — интенсивность равномерно распределенной по кольцу радиальной нагрузки.

2.66. Квадратная рамка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси A—A (рис. 2.65). Определить изгибающие моменты, возникающие при этом в поперечных сечениях стержней. Стержни одинаковые, погонный вес q.

2.67. Боковые элементы стальной рамы прибора (рис. 2.66) при сборке подверглись перекосу на углы ϑ, средняя опора сместилась на величину Δ. Какие напряжения возникли в раме и какую форму приняла фигура, образованная осями элементов рамы? Дано: $\Delta = 1$ мм; $\vartheta = 3°$; $l = 0{,}1$ м; $b = 5$ мм; $h = 10$ мм. Стержни изгибаются относительно оси x.

2.68. Рама, состоящая из одинаковых стержней, движется поступательно и в некоторый момент времени останавливается силами P, как показано на рис. 2.67. Построить эпюру изгибающих моментов, возникающих при остановке. Размеры стержней считать известными.

2.69. Балка AB (рис. 2.68), шарнирно опертая по концам, нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q. Для увеличения допускаемой нагрузки балка стянута тягами AC и CB, соединенными с распорной гайкой D. В процессе нагружения гайка затягивается, что приводит к возникновению распорной силы и уменьшению наибольшего изгибающего момента в балке. Разгрузка балки контролируется по показанию тензодатчика, наклеенного на тягу. Определить линейную деформацию, замеряемую датчиком, при оптимальных условиях нагружения балки (оптимальными считать условия, при которых коэффициент запаса по текучести наибольший). Дано: $l = 1$ м; $q = 16$ кН/м; $\alpha = 15°$, поперечное сечение балки — двутавр № 10 по ГОСТ 8239—72, тяги изготовлены из прутка легированной стали диаметром 12 мм.

2.70. Для рам, изображенных на рис. 2.69, определить нагрузку, при которой исчерпывается несущая способность рамы. Внутренний предельный момент стержней $\mathcal{M}_{\text{пр}}$ считать известным.

ГЛАВА 3

ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕННЫМ И ДЕФОРМИРОВАННЫМ СОСТОЯНИЯМИ

§ 1. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

3.01. В некоторой точке M деформированного тела известны компоненты напряжений (МПа): $\sigma_x = 70$; $\sigma_y = -50$; $\sigma_z = 30$; $\tau_{xy} = 0$; $\tau_{yz} = 40$; $\tau_{zx} = 10$. Определить нормальное σ_n и касательное τ_n напряжения в этой точке по площадке с единичным вектором нормали $n = -\frac{2}{3}\bar{e}_x + \frac{2}{3}\bar{e}_y + \frac{1}{3}\bar{e}_z$, где $\bar{e}_x$, $\bar{e}_y$, $\bar{e}_z$ — единичные векторы координатных осей.

3.02. Определить тип напряженного состояния, если инварианты тензора напряжений равны: а) $I_1 \neq 0$; $I_2 = 0$; $I_3 = 0$; б) $I_1 \neq 0$; $I_2 \neq 0$; $I_3 = 0$; в) $I_1 = 0$; $I_2 \neq 0$; $I_3 = 0$; г) $I_1 < 0$; $I_2 = 0$; $I_3 = 0$; д) $I_1 = 0$; $I_2 \neq 0$; $I_3 \neq 0$.

3.03. Для данных напряженных состояний (рис. 3.01) подсчитать главные напряжения. Определить и показать на чертеже направление первого главного напряжения σ_1 для случаев *а* и *б* и второго σ_2 — для случая *г* (напряжения на рисунках даны в МПа)

3.04. В некоторой точке задано напряженное состояние (рис. 3.02). Чему должно быть равно напряжение σ_y, чтобы это напряженное состояние стало двухосным? Определить направление площадки, свободной от напряжений (напряжения даны в МПа).

3.05. Для напряженных состояний, изображенных на рис. 3.03, определить главные напряжения по величине и направлению. Задачу решить аналитически и графически с помощью диаграммы напряжений Мора. Изобразить на чертеже элемент повернутым так, чтобы все его грани стали главными площадками (напряжения даны в МПа).

3.06. Определить нормальные и касательные напряжения в площадках, отмеченных штриховкой на рис. 3.04 (задачу решить графически с помощью диаграммы напряжений Мора).

3.07. На кубическом элементе, грани которого совпадают с главными плоскостями, показать площадку, напряжения в которой равны координатам точки A, отмеченной на круговой диаграмме рисунка 3.05.

3.08. Для данных напряженных состояний (рис. 3.06) определить наибольшее касательное напряжение и показать площадку, в которой оно действует.

3.09. Определить линейную деформацию в данной точке в направлении u (рис. 3.07), если деформации ε_x и ε_y в этой точке известны. Деформированное состояние плоское, $\gamma_{xy}=0$.

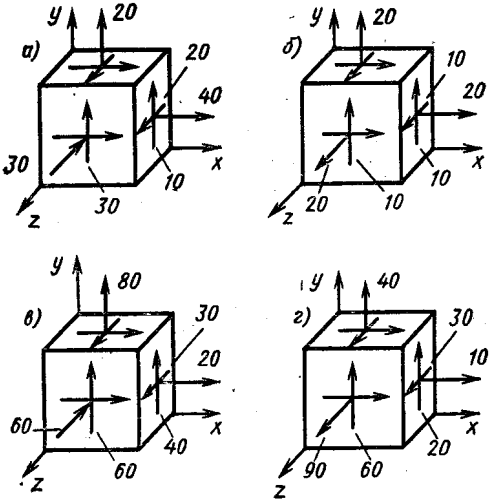


Рис. 3.01

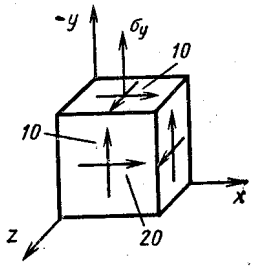


Рис. 3.02

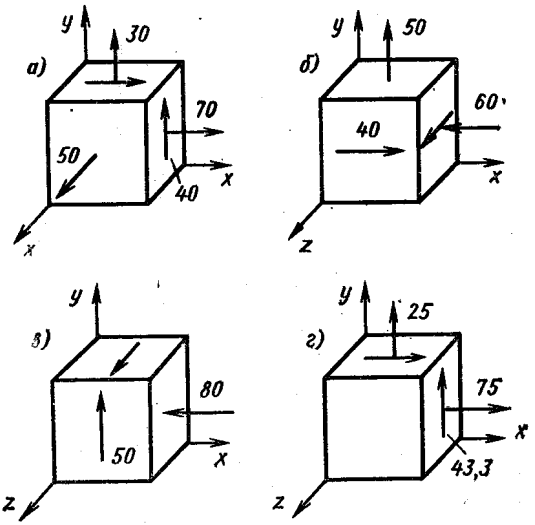


Рис. 3.03

3.10. Деформации в направлениях u, v, t (рис. 3.08), замеренные с помощью тензодатчиков омического сопротивления, равны: $\varepsilon_u = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_v = 0{,}14 \cdot 10^{-2}$; $\varepsilon_t = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$. Определить аналитически и графически величины и направления главных деформаций в плоскости uv.

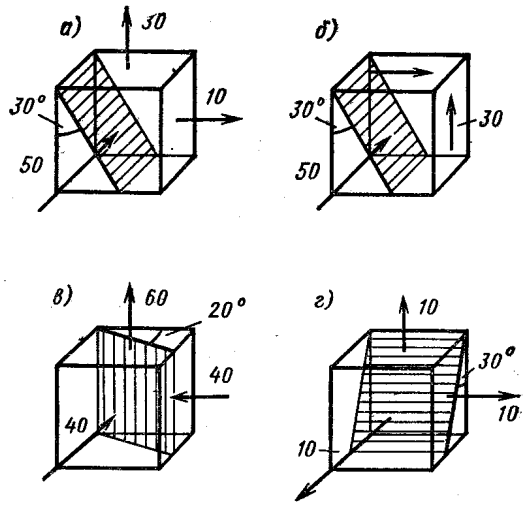


Рис. 3.04

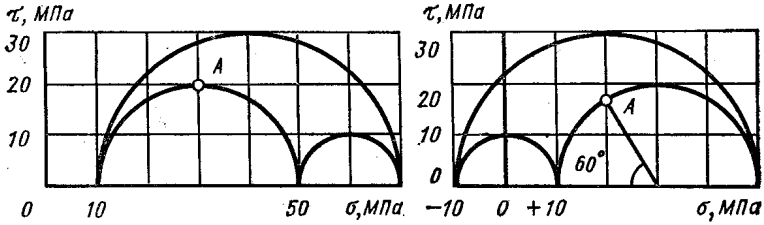


Рис. 3.05

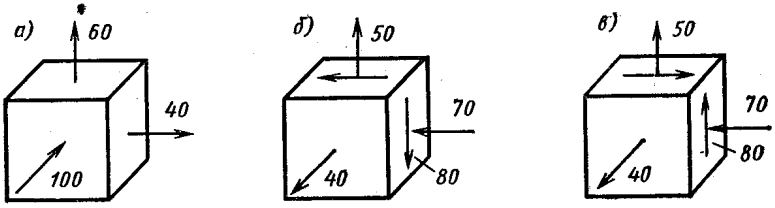


Рис. 3.06

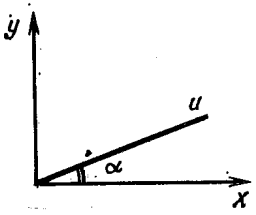


Рис. 3.07

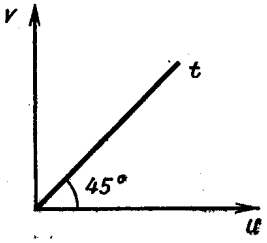


Рис. 3.08

3.11. Для поля перемещений $u = 3xy^2$; $v = 2xz$; $w = z^2 - xy$ определить тензор деформаций и объемную деформацию Δ.

3.12. Определить наибольшую деформацию сдвига γ_{max}, если $\varepsilon_x = 0$; $\varepsilon_y = 5 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_z = 3 \cdot 10^{-3}$; $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$; $\gamma_{zy} = 2\sqrt{3} \cdot 10^{-3}$ (задачу решить аналитически и графически).

§ 2. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕННЫМ И ДЕФОРМИРОВАННЫМ СОСТОЯНИЯМИ

3.13. При каком соотношении между главными напряжениями возникает одноосное деформированное состояние?

3.14. На поверхности стального стержня, нагруженного по торцам произвольной системой сил, в некоторой точке замерены деформации ε_u и ε_v в двух взаимно перпендикулярных направлениях u и v. Чему равны напряжения σ_u и σ_v, если $\varepsilon_u = 0{,}4 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_v = -0{,}8 \cdot 10^{-3}$; $\mu = 0{,}3$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа?

3.15. Стальной цилиндр помещен в камеру высокого давления ($p = 50$ МПа) и подвержен действию некоторой системы нагрузок.

В точке A на поверхности цилиндра внутри камеры замерены деформации в продольном ε_z и поперечном ε_t направлениях. Чему равны напряжения σ_z и σ_t, если $\varepsilon_z = 0{,}3 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_t = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0{,}3$?

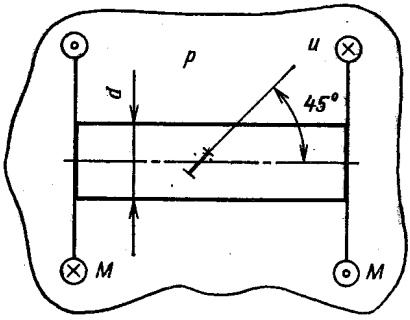


Рис. 3.09

3.16. Валик, помещенный в камеру высокого давления, скручивается моментами M (рис. 3.09). На поверхности валика под углом 45° к образующей наклеен тензодатчик. Определить момент M, если деформация, замеренная датчиком $\varepsilon_u = 32 \cdot 10^{-5}$; давление $p = 100$ МПа; диаметр валика $d = 20$ мм; материал сталь; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0{,}3$.

3.17. Элемент в форме куба (рис. 3.10) равномерно сжимается напряжениями σ_0. В каком случае изменение объема будет больше: *а* — элемент расположен на гладкой плите; *б* — элемент плотно, но без натяга, вставлен в паз; *в* — элемент плотно, без натяга, помещен в квадратное отверстие. Материал плиты во втором и третьем случаях считать абсолютно жестким. Коэффициент Пуассона материала элемента $\mu = 0{,}3$.

3.18. Брус проходит через камеру высокого давления (рис. 3.11). Полагая силу P и площадь поперечного сечения бруса F заданными и пренебрегая влиянием уплотнений, установить, при каком внутреннем давлении p изменение объема бруса на

участке l определится по формуле $\Delta V = \Delta l F$, где Δl — изменение длины l.

3.19. По результатам испытания сплошного образца диаметром d, подверженного действию всестороннего давления p и растягивающей силы $P = 0{,}5p\pi d^2$, построить зависимость интенсивности

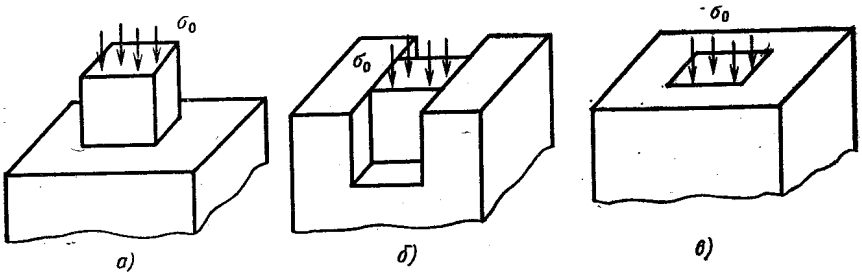


Рис. 3.10

напряжений σ_i от интенсивности деформаций ε_i. Принять $\mu = 0{,}5$; $d = 20$ мм. Данные испытания:

Давление p, МПа	0	50	100	112,5	125	137,5	150
Показания измерителя деформации в окружном направлении	0	—25	—50	—100	—150	—200	—250

Цена деления измерителя деформации 10^{-5}.

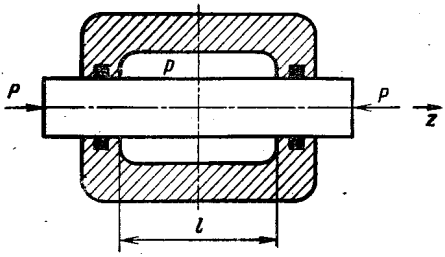


Рис. 3.11

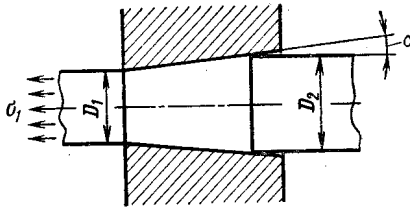


Рис. 3.12

3.20. Для получения проволоки необходимого диаметра методом холодной протяжки ее протягивают через коническое сужающееся отверстие (фильеру) (рис. 3.12). Определить зависимость между напряжением σ_1 и отношением диаметров $D_1 : D_2$. Найти предельное значение $D_1 : D_2$. Материал проволоки считать идеальным упруго-пластичным, угол конусности малым. Коэффициент трения по поверхности контакта проволоки с фильерой f. Касательными напряжениями в поперечных сечениях проволоки пренебречь. Получить числовой результат для $\alpha = 10°$, $f = 0{,}2$.

ГЛАВА 4

КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО БРУСА

§ 1. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ

4.01. Для брусьев, изображенных на рис. 4.01, построить эпюры внутренних крутящих моментов $\mathscr{M}_к$ и углов поворота сечений φ. Жесткость при кручении $GI_к$.

4.02. Как деформируется окружность диаметром d, нарисованная на боковой поверхности тонкостенной трубки, скрученной моментами M? Диаметр окружности значительно меньше диаметра трубки.

4.03. Описать схему эксперимента и метод обработки его результатов по определению момента, скручивающего сплошной цилиндрический вал диаметром d, с помощью тензодатчиков омического сопротивления.

4.04. Из показанных на рис. 4.02 поперечных сечений скрученного бруса выбрать оптимальные по расходу металла из условия прочности и из условия жесткости.

4.05. Сравнить прочность и жесткость при свободном кручении замкнутого и открытого трубчатых профилей одинаковых габаритных размеров (рис. 4.03).

4.06. При свободном кручении некоторых брусьев не подтверждается пословица: «Где тонко, там и рвется». Какое сечение имеют эти брусья?

4.07. Коробчатый брус, сваренный из двух гнутых профилей (рис. 4.04), скручивается моментами M. Определить усилие T, действующее на точечную сварку. Дано: $R = 40$ мм; $h = 2$ мм; $l = 2$ м; $M = 700$ Н·м.

4.08. Стержень AB круглого поперечного сечения закреплен в подшипнике AC, затяжка которого создает равномерно распределенный по длине l момент сил трения m, Н·м/м (рис. 4.05). Определить наименьшее значение внешнего момента $M = M^*$, при котором стержень будет проворачиваться. Построить эпюры внутренних крутящих моментов $\mathscr{M}_к$ и углов поворота сечений φ

при действии момента $M = \frac{3}{4} M^*$. Определить остаточные внутренние моменты и углы поворота после разгрузки. Жесткость стержня при кручении $GI_к$ и длины l и $a = \frac{l}{2}$ считать известными.

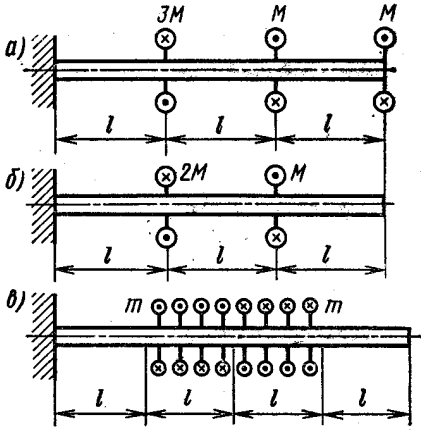


Рис. 4.01

4.09. Сравнить моменты $\mathcal{M}_т$ и $\mathcal{M}_{пр}$ для трех брусьев, имеющих одинаковую площадь поперечных сечений ($\mathcal{M}_т$ — момент, при котором возникают первые пластические деформации; $\mathcal{M}_{пр}$ — предельный момент). Форма поперечных сечений показана на рис. 4.06, *а*. Материал брусьев — идеальный упругопластичный, характеристика $\tau = \tau(\gamma)$ дана на рис. 4.06, *б*.

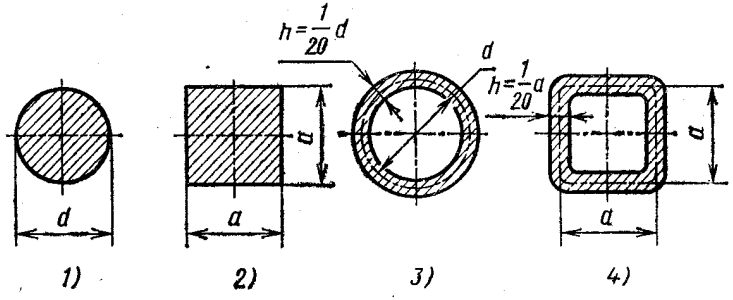


Рис. 4.02

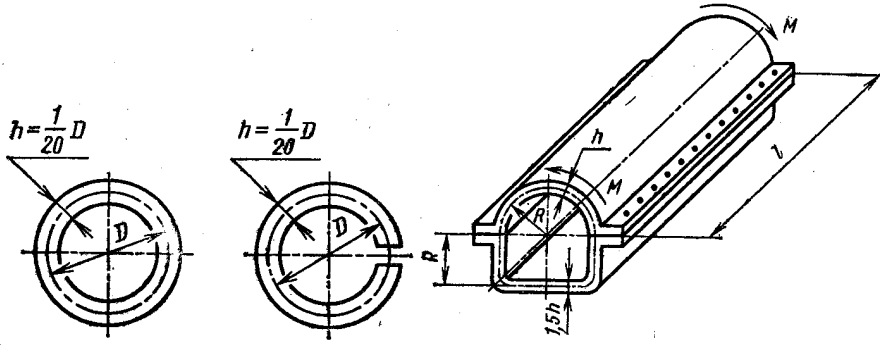


Рис. 4.03

Рис. 4.04

4.10. **Торсионный вал, изображенный на рис. 4.07, *а* предварительно подвергается заневоливанию моментом M_0, при котором радиус упругого ядра $r_т = d/4$. Определить напряжения, возникающие в поперечных сечениях вала в рабочих условиях, при действии момента $M_{раб} = 5$ кН·м. Подсчитать коэффициенты запаса по текучести и по предельной нагрузке при $M = M_{раб}$. Вычислить угол закручивания вала в рабочих условиях: φ_0 — с учетом остаточного угла закручивания и φ_1 — без учета. Дано: $l = 1$ м; $d = 30$ мм; материал вала — термообработанная кремнистая сталь 60С2, имеющая характеристику, показанную на рис. 4.07, *б*; $\tau_т = 1000$ МПа; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.**

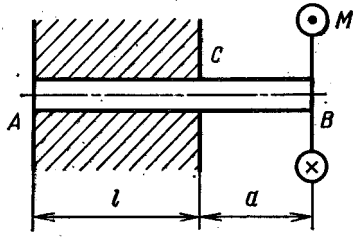


Рис. 4.05

Указание. Под коэффициентом запаса по текучести в данном случае следует понимать отношение $M_0/M_{раб}$.

4.11. Определить момент $\mathcal{M}_т$, при котором возникают первые пластические деформации, и предельное значение момента $\mathcal{M}_{пр}$ при кручении тонкостенного бруса, поперечное сечение которого изображено на рис. 4.08. Материал идеальный упруго-пластичный. Дано: $d = 50$ мм; $R = 27$ мм; $r = 23$ мм; $a = 2$ мм; $\tau_т = 200$ МПа.

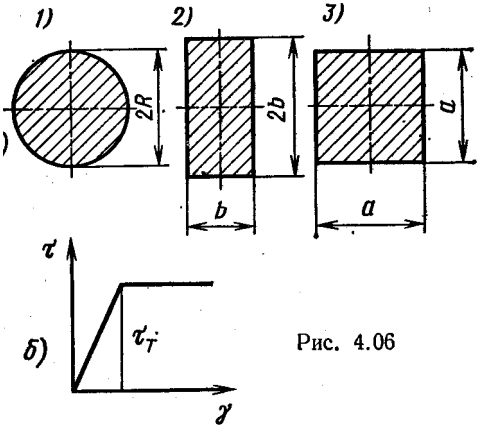


Рис. 4.06

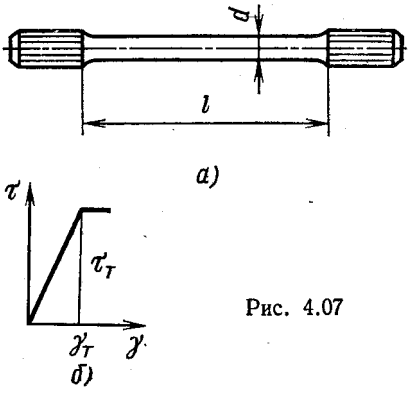


Рис. 4.07

4.12. Тонкостенный валик ($D = 20$ мм; $h = 2$ мм; $l = 1$ м) нагружен скручивающими моментами M и растягивающими силами P, которые нарастают одновременно, пропорционально одному параметру. Определить изменение диаметра валика ΔD и угол закручивания φ при $M = 189$ Н·м; $P = 18{,}9$ кН. Диаграмма деформирования материала валика изображена на рис. 4.09, $\mu = 0{,}5$.

4.13. Определить коэффициент запаса по разрушению $n_в$ при кручении бруса сплошного круглого поперечного сечения диаметром d. Материал бруса хрупкий, схематизированная диаграмма

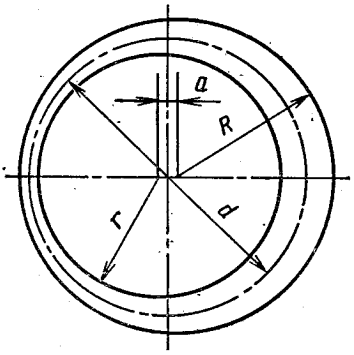


Рис. 4.08

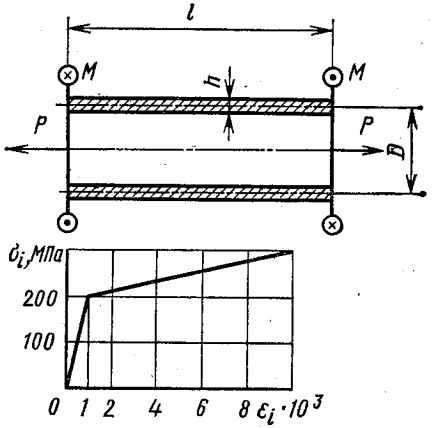


Рис. 4.09

сдвига его вплоть до разрушения показана на рис. 4.10; M = = 750 Н·м; d = 30 мм. Что изменится в определении $n_в$, если сплошной брус заменить тонкостенной трубкой диаметром D с толщиной стенки h?

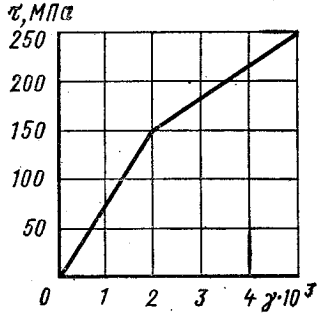


Рис. 4.10

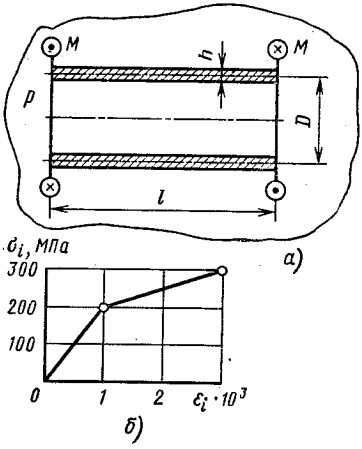


Рис. 4.11

4.14. Тонкостенная трубка (рис. 4.11, *а*) длиной l = 200 мм, диаметром D = 20 мм с толщиной стенки h = 2 мм подвержена действию всестороннего равного давления p, Па, и скручивающих моментов M, Н·м, которые увеличиваются одновременно пропорционально некоторому параметру, так что $M = kp$ (k = 1,5 ×

$\times 10^{-6}$ м^3). Диаграмма деформирования материала трубки дана на рис. 4.11, *б*. Определить момент M и давление p при $\sigma_i =$ $= 300$ МПа, а также соответствующие им угол закручивания φ и изменение длины трубки Δl. Коэффициент поперечной деформации μ считать равным 0,5.

§ 2. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ

4.15. При каком значении α все участки бруса, изображенного на рис. 4.12, равнопрочны? Построить эпюры внутренних крутящих моментов и углов поворота сечений для найденного значения α. Определить коэффициент запаса по текучести и наибольший угол поворота сечения, если $M = 550$ Н·м; $l = 0{,}5$ м; $d = 30$ мм; $\tau_т = 100$ МПа. Материал бруса сталь.

4.16. Момент M, нагружающий брус ABC (рис. 4.13), уравновешивается реактивным моментом заделки C, и моментом сил

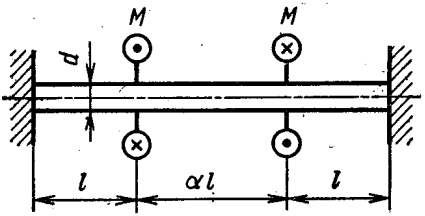


Рис. 4.12

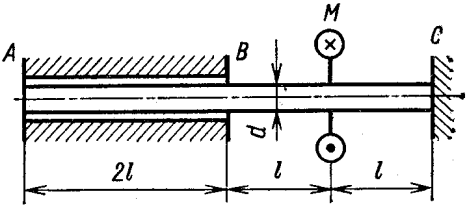


Рис. 4.13

трения, равномерно распределенных по длине AB. Экспериментально установлено, что угол поворота сечения A в 2 раза меньше угла поворота сечения B. Определить реактивный момент заделки M_C и интенсивность моментов сил трения. Построить эпюры крутящих моментов и углов поворота сечений бруса.

4.17. Конструкция, состоящая из детали A и приваренной к фланцам детали трубки B ($I_к^A = 3I_к^B$) нагружена так, как показано на рис. 4.14. При каком значении z_0 прочность трубки наибольшая?

4.18. К валику (рис. 4.15), скрученному моментами M, приваривается трубка из того же материала, после чего момент снимается. Определить остаточные внутренние моменты $\mathcal{M}_{ост}$ в валике и трубке. При каком соотношении между диаметрами валика d и трубки D коэффициент запаса по текучести системы наибольший? Толщина трубки $h = \frac{1}{20} D$.

4.19. Валик AB одним концом закреплен неподвижно, а другим присоединен к жесткому рычагу CD, поворот которого ограничен опорами (рис. 4.16). Определить зависимость реактивного момента M_A в опоре A и реакций R опор C и D от зазора Δ при нагружении валика моментом M.

4.20. Брус, закрепленный одним концом, несет на себе жесткую траверсу, соединенную с тягами (рис. 4.17). Исследовать зависимость реактивного момента M_A опоры от длины тяг при действии момента M. Размеры элементов системы считать известными.

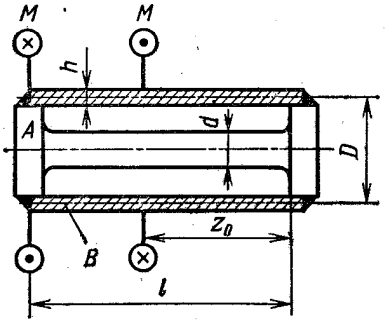


Рис. 4.14

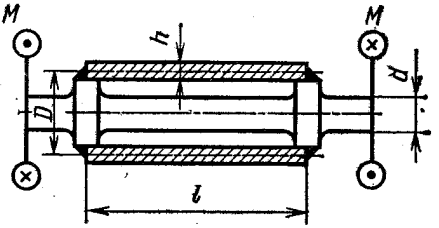


Рис. 4.15

4.21. Трубка и свободно вставленный в нее валик прикреплены правыми торцами к жесткой опоре (рис. 4.18). На их левых торцах имеются пазы, угол между которыми в свободном состоянии φ_0. При помощи пластины пазы при сборке совмещаются, после чего

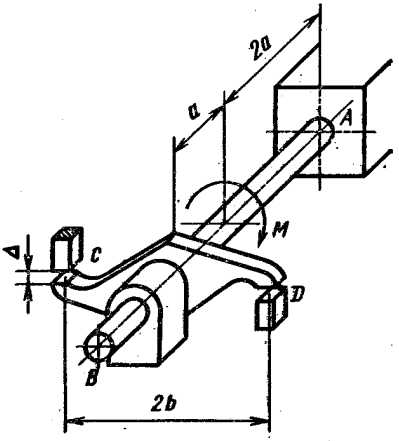


Рис. 4.16

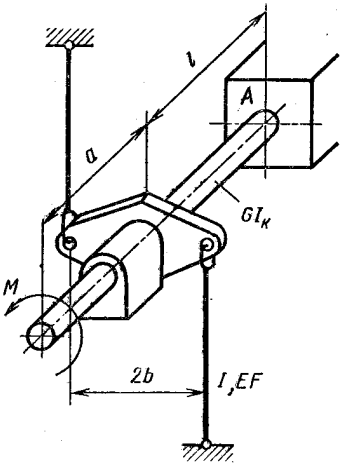


Рис. 4.17

система нагружается внешним моментом M. При каком значении угла φ_0 наибольшие напряжения в валике и трубке в рабочем состоянии одинаковы? Дано: $D = 40$ мм; $d = 30$ мм; $l = 1$ м; $M = 1$ кН·м, материал сталь.

4.22. Вычислить работу A, совершаемую внешними моментами при скручивании бруса постоянного поперечного сечения, закреп-

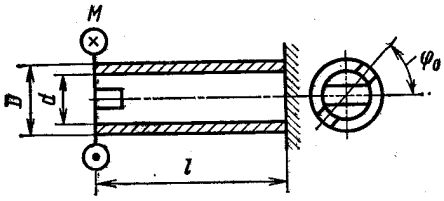


Рис. 4.18

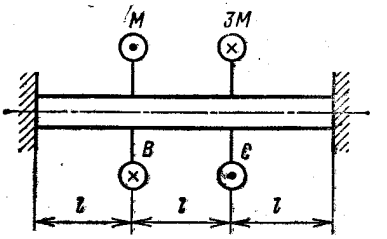


Рис. 4.19

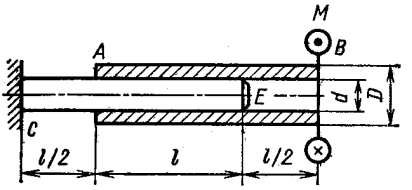


Рис. 4.20

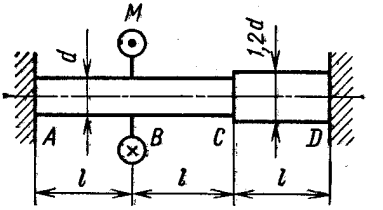


Рис. 4.21

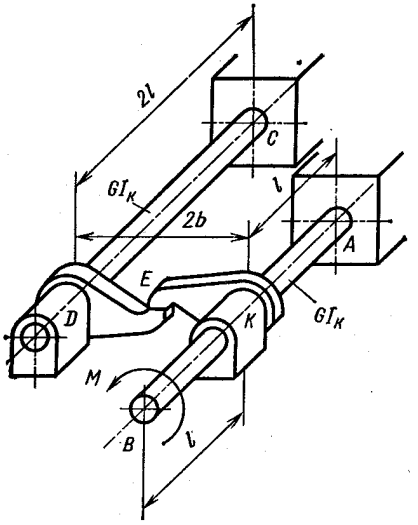


Рис. 4.22

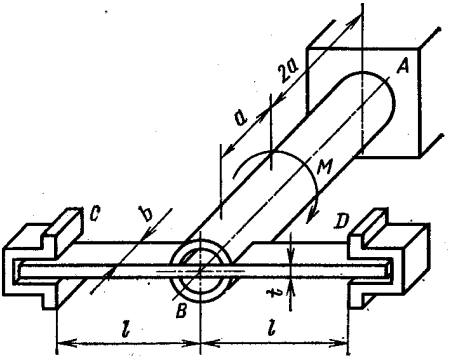


Рис. 4.23

ленного по торцам (рис. 4.19). Проверить полученный результат, подсчитав энергию деформации, как работу внутренних моментов. Жесткость бруса при кручении $GI_к$.

4.23. Бронзовая трубка AB (рис. 4.20) насажена на стальной стержень CE с некоторым натягом. Определить наименьшее значение момента M, который нужно приложить к трубке, чтобы провернуть ее относительно стержня. Построить эпюры внутренних моментов и углов поворота, возникающих при этом в стержне и трубке. Считать, что давление по поверхности контакта распределено равномерно и равно $p = 2{,}5$ МПа, коэффициент трения f. Дано: $d = 10$ мм; $D = 12{,}5$ мм; $l = 100$ мм; $f = 0{,}2$; $G_{стали} = 8 \cdot 10^4$ МПа; $G_{бронзы} = 4 \cdot 10^4$ МПа.

4.24. Для бруса, изображенного на рис. 4.21, определить предельный внешний момент $M_{пр}$, построить эпюры касательных напряжений по сечению для различных участков бруса при $M = M_{пр}$. Материал идеальный упруго-пластичный. Размеры бруса и $\tau_т$ считать известными.

4.25. Конструкция, состоящая из упругих стержней AB и CD и абсолютно жестких рычагов DE и EK нагружена моментом M (рис. 4.22). Построить эпюры внутренних моментов и углов поворота сечений для стержней AB и CD. Размеры элементов конструкции и модуль сдвига G считать известными.

4.26. Тонкостенная стальная трубка AB одним концом закреплена неподвижно, а другим присоединена к стальной пластинчатой пружине CD. Трубка нагружена моментом $M = 400$ Н·м (рис. 4.23). Определить коэффициенты запаса системы по текучести $n_т$ и по предельной нагрузке $n_в$, если $b = 30$ мм, $t = 5$ мм, $l = a = 200$ мм, диаметр трубки $D_{ср} = 20$ мм, толщина стенки $h = 2$ мм. Материал трубки и пружины идеальный упруго-пластичный, для трубки $\tau_т = 300$ МПа, для пружины $\sigma_т = 800$ МПа. Принять $G = \frac{2}{5} E$.

ГЛАВА 5

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ НАГРУЖЕНИЯ БРУСА

§ 1. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ЛАГРАНЖА И КАСТИЛЬЯНО. РАБОТА ВНЕШНИХ СИЛ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

5.01. Жесткие стержни AB и BC нагружены силами P и T (рис. 5.01). Применяя принцип возможных перемещений, определить условие равновесия системы. Угол α мал, так что $\operatorname{tg}\alpha \approx \approx \sin\alpha \approx \alpha$.

5.02. Для балки, изображенной на рис. 5.02, определить предельное значение нагрузки $P_{пр}$, используя принцип возможных перемещений. Материал балки идеальный упруго-пластичный, внутренний предельный момент $\mathscr{M}_{пр}$ считать известным.

5.03. Брус AB из линейно-упругого материала закреплен между жесткими опорами и нагружен силой P (рис. 5.03). Требуется: а) определить перемещение сечения C с помощью вариационного уравнения Лагранжа (жесткость бруса EF), б) подсчитать реакцию опоры B, используя теорему Кастильяно.

5.04. Используя вариационное уравнение Лагранжа, определить приближенное значение наибольшего прогиба балок, изображенных на рис. 5.04. Материал линейно-упругий, жесткость EI_x считать известной, уравнение изогнутой оси принять в виде $y = f\sin\frac{\pi z}{l}$.

5.05. Раскрыть статическую неопределимость балки, изображенной на рис. 5.05, используя теорему Кастильяно. Жесткость постоянна и равна EI_x.

5.06. Стержни AB и BC (рис. 5.06) до приложения нагрузки расположены вдоль прямой AC. Под действием силы P стержни удлиняются, узел B опускается вниз на величину u. Применяя теорему Лагранжа, определить зависимость перемещения u от силы P при малых значениях угла α. Жесткость стержней при растяжении EF.

5.07. Стержень AB малой кривизны нагружен парой сил, момент которой M (рис. 5.07). Определить угол поворота сечения в его плоскости, используя равенство работы внешних сил потенциальной энергии деформации. Принять $GI_к = 0{,}8EI_x$.

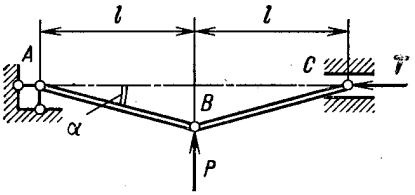


Рис. 5.01

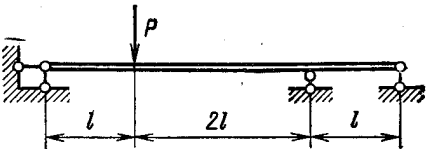


Рис. 5.02

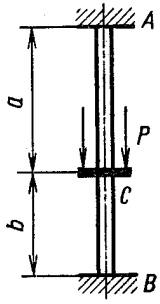


Рис. 5.03

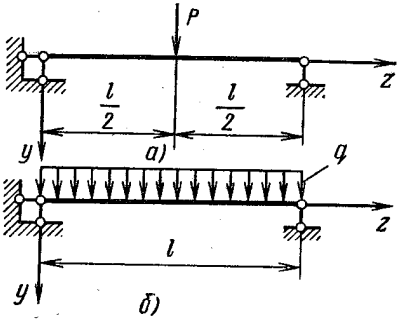


Рис. 5.04

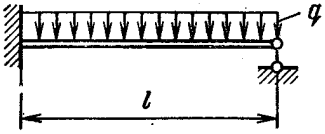


Рис. 5.05

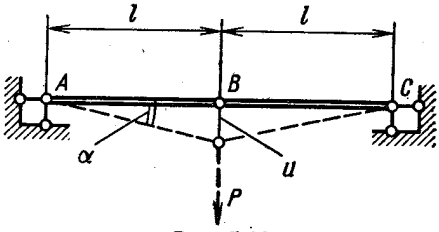


Рис. 5.06

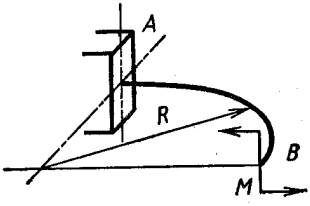


Рис. 5.07

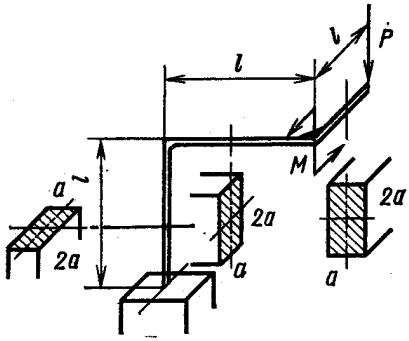


Рис. 5.08

5.08. Определить потенциальную энергию деформации стержневой системы, изображенной на рис. 5.08, при действии только силы P, только момента $M = Pl$ и при совместном действии силы и момента (размеры стержней считать известными, $G = 0{,}4E$).

5.09. Тонкостенная трубка диаметром D (рис. 5.09) с толщиной стенки h, скрученная моментами M, помещена в камеру высокого давления p. Определить потенциальную энергию деформации

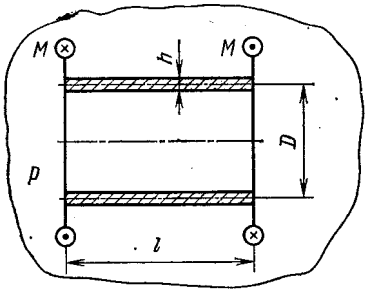


Рис. 5.09

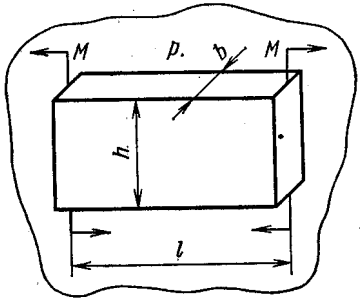


Рис. 5.10

трубки и подсчитать работу внешних нагрузок. Дано: $D = 50$ мм; $h = 1$ мм; $l = 200$ мм; $M = 200$ Н·м; $p = 100$ МПа; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

5.10. Стержень прямоугольного поперечного сечения (рис. 5.10) находится под действием моментов M и всестороннего давления p. Определить потенциальную энергию деформации стержня и сравнить ее с работой внешних нагрузок. Дано: $b = 20$ мм; $h = 30$ мм; $l = 200$ мм; $M = 300$ Н·м; $p = 100$ МПа, материал сталь: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0{,}3$.

§ 2. РАСЧЕТ ПЛОСКО-ПРОСТРАНСТВЕННЫХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

5.11. Для плоско-пространственных рам, изображенных на рис. 5.11, построить эпюры внутренних изгибающих и крутящих моментов. Для рамы на рис. 5.11, *г* подсчитать потенциальную энергию деформации, приняв $GI_к = 0{,}6EI_x$.

5.12. Построить эпюры внутренних изгибающих и крутящих моментов, возникающих в рамах, изображенных на рис. 5.12.

5.13. Для рамы, изображенной на рис. 5.13, выбрать опору A так, чтобы система была статически определимой, геометрически неизменяемой, после чего построить эпюры внутренних изгибающих и крутящих моментов. Вычислить перемещение сечения B в направлении силы P с помощью теоремы Кастильяно и методом Мора—Верещагина. Стержни рамы стальные ($\mu = 0{,}25$); поперечное сечение — тонкостенная труба.

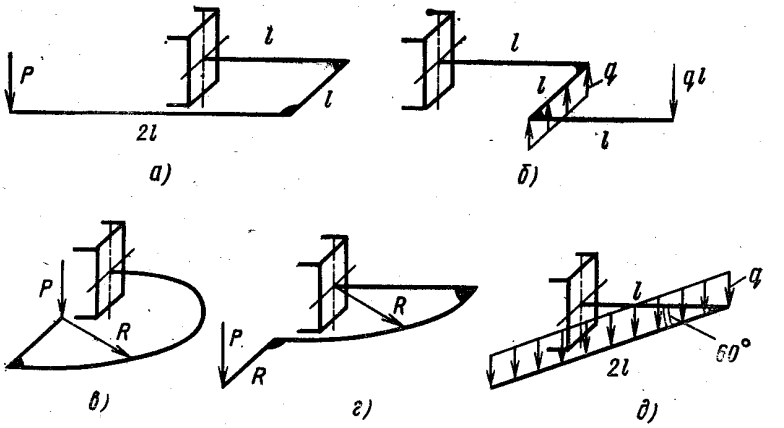


Рис. 5.11

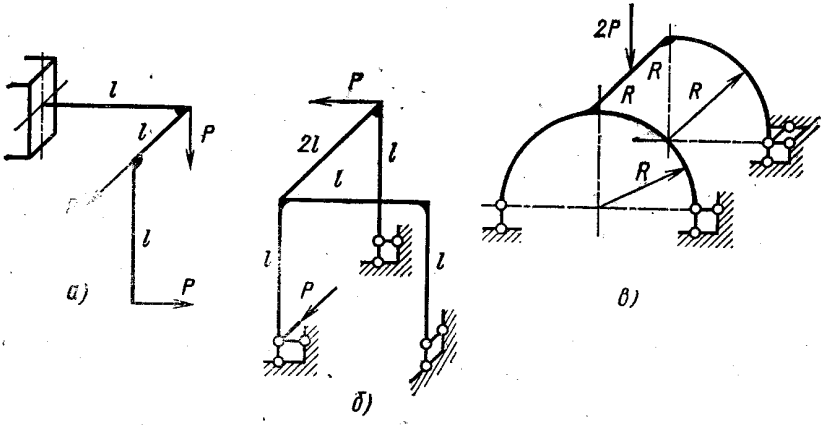


Рис. 5.12

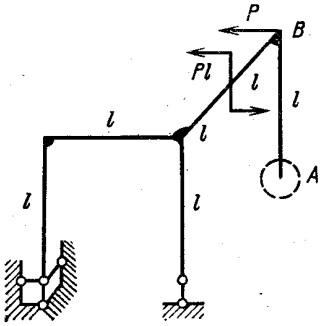


Рис. 5.13

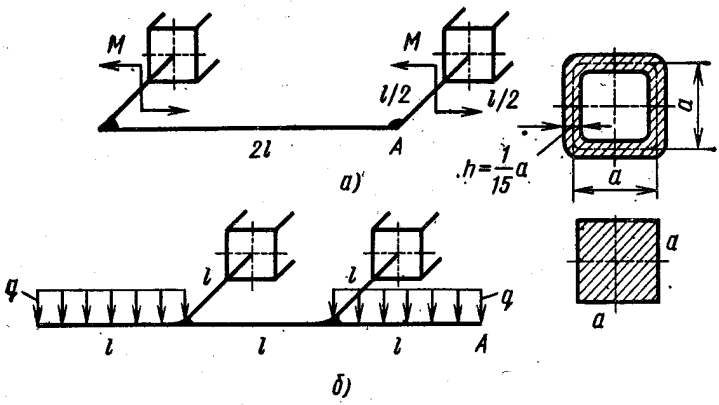


Рис. 5.14

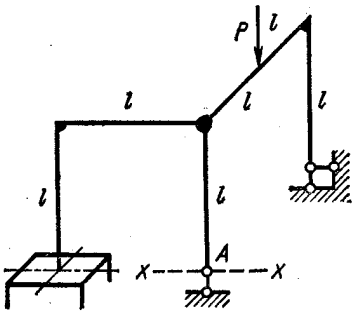


Рис. 5.15

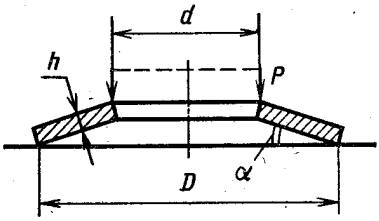


Рис. 5.16

5.14. Построить эпюры внутренних изгибающих и крутящих моментов, возникающих в рамах, показанных на рис. 5.14. Определить смещение сечения A. Размеры рам считать известными. Принять $\mu = 0{,}25$.

5.15. Рама, изображенная на рис. 5.15, выполнена из стальных стержней круглого поперечного сечения. Требуется, выбрав наиболее рациональную основную систему, раскрыть статическую неопределимость и найти перемещение сечения A в направлении $x—x$. Принять $\mu = 0{,}25$.

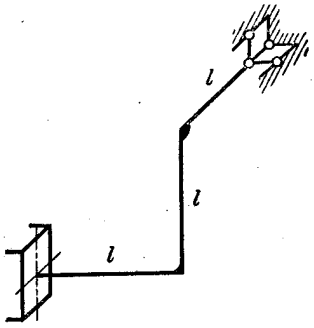


Рис. 5.17

5.16. Определить в первом приближении наибольшее напряжение в тарелке пружины Бельвиля (рис. 5.16). Расчет выполнить для малых углов α, рассматривая пружину как брус малой кривизны. Дано: $D = 100$ мм; $d = 60$ мм; $h = 5$ мм; $P = 3$ кН.

5.17. Определить напряжения, возникающие в стержневой конструкции, показанной на рис. 5.17, при нагреве ее на $t = 100\ ^\circ C$. Стержни стальные, поперечное сечение их — тонкостенное кольцо диаметром $D_{ср}$ с толщиной стенки h. Дано: $D_{ср} = 20$ мм; $h = 2$ мм; $l = 200$ мм. Подсчитать коэффициент запаса по текучести, если $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 200$ МПа. Расчет выполнить по теории Мора.

§ 3. РАСЧЕТ ПРУЖИН

5.18. Жесткие детали *1* и *2* (рис. 5.18) прижаты одна к другой пружиной, усилие затяжки которой T. Определить зависимость взаимного смещения этих деталей от сил P. Податливость пружины δ считать известной.

5.19. Пружина предохранительного клапана (рис. 5.19) имеет размеры $D = 30$ мм, $d = 3{,}6$ мм, число рабочих витков $i = 9$. Клапан должен открываться при давлении $p = 1$ МПа, $\varnothing\Delta = 20$ мм. Рабочий ход клапана $h = 5$ мм, зазор между витками

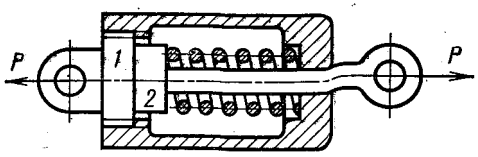


Рис. 5.18

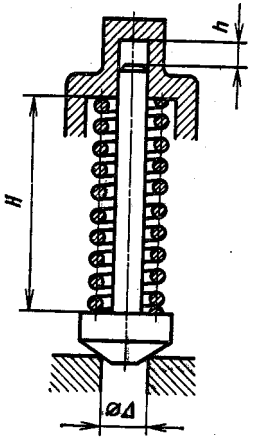


Рис. 5.19

в крайнем верхнем положении клапана $a = 1$ мм. Определить высоту пружины H_0 в свободном состоянии, высоту H в рабочем положении. Вычислить коэффициент запаса по текучести. Материал пружины кремнистая сталь 60С2, предел текучести $\tau_т = 1000$ МПа.

5.20. Определить изменение диаметра D пружины кручения, свитой из стальной проволоки круглого поперечного сечения, при действии моментов M (рис. 5.20). Подсчитать наибольшее напряжение, возникающее при этом в поперечном сечении проволоки, и взаимный угол поворота φ торцов пружины. Дано: $D = 50$ мм; $d = 5$ мм; $i = 10$; $M = 10$ Н·м. Угол подъема витков ϑ считать малым.

5.21. Цилиндрическая пружина, свитая из стальной проволоки круглого поперечного сечения (рис. 5.21), сжимается силой P до полной посадки витков. Определить силу P, наибольшее напряжение и изменение диаметра D пружины. Дано: $D = 50$ мм;

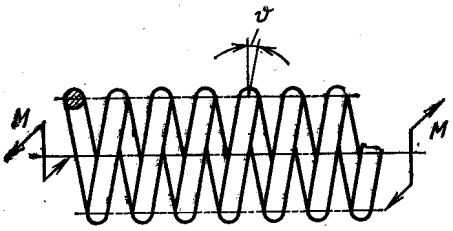


Рис. 5.20

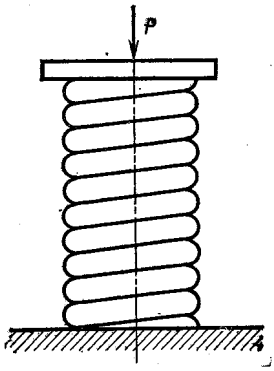


Рис. 5.21

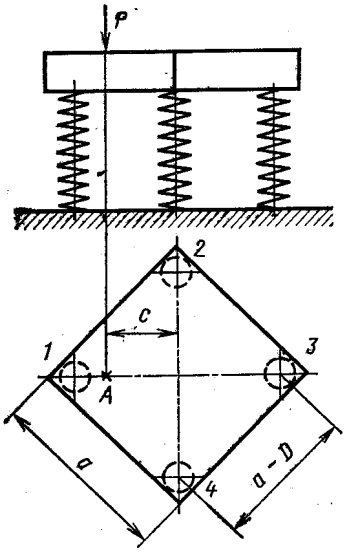


Рис. 5.22

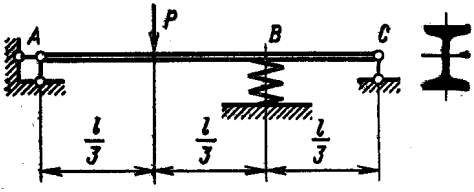


Рис. 5.23

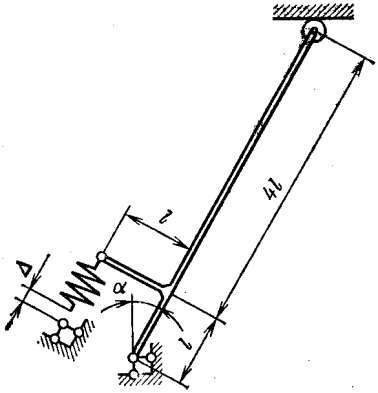


Рис. 5.24

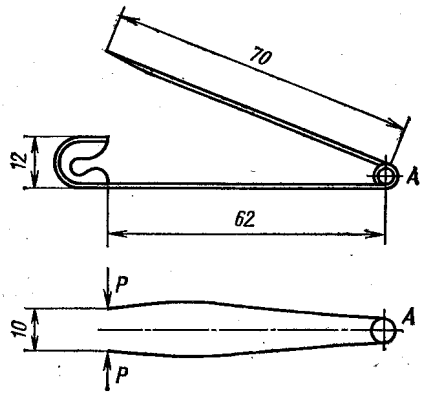


Рис. 5.25

$d = 5$ мм; число рабочих витков $i = 9$; шаг пружины в свободном состоянии $t = 15$ мм.

5.22. Жесткая, квадратная в плане плита (рис. 5.22) весом Q оперта на четыре одинаковых цилиндрических пружины и нагружена силой P. Определить напряжения, возникающие в пружинах, и перемещение точки A. Дано: $Q = 1000$ Н; $P = 500$ Н; $D = 100$ мм; $d = 10$ мм; $i = 10$; $a = 600$ мм; $c = \frac{1}{4} a\sqrt{2}$. Материал пружин сталь.

5.23. Двутавровая балка ABC (рис. 5.23) опирается на жесткие опоры A и C и пружину B. Определить напряжения в балке и пружине при действии силы P. Дано: балка — двутавр № 20 (ГОСТ 8239—72); $l = 6$ м; $P = 10$ кН; $E = 2{,}2 \cdot 10^5$ МПа; пружина — $D = 100$ мм; $d = 20$ мм; $i = 6$; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

5.24. Определить наибольшие напряжения в пружине и рычаге токоприемника, возникающие после сборки конструкции, изображенной на рис. 5.24. Материал сталь, диаметр пружины $D = 40$ мм; диаметр проволоки пружины $d = 6$ мм; число витков $i = 20$; зазор $\Delta = 50$ мм; диаметр рычагов $a = 16$ мм; $l = 250$ мм; $\alpha = 30°$.

5.25. Оценить наибольшее напряжение в проволоке булавки в закрытом положении. Размеры булавки (в мм) в свободном состоянии показаны на рис. 5.25. Диаметр проволоки булавки $d = 1{,}6$ мм; диаметр пружины A равен $D = 6$ мм, число витков $i = 2{,}5$; взаимное смещение концов булавки принять равным 26 мм. Материал сталь, деформации упругие. В первом приближении считать справедливыми принцип начальных размеров и элементарные зависимости сопротивления материалов.

5.26. Цилиндрическая пружина диаметром $D = 50$ мм, свитая из проволоки круглого поперечного сечения $d = 5$ мм (начальная длина $L_0 = 350$ мм, число витков $i = 10$) обжата до соприкосновения витков. Определить силу обжатия P_{max}, построить эпюру остаточных напряжений, вычислить остаточную осадку пружины $\lambda_{ост}$. Построить эпюру напряжений при действии рабочей нагрузки $P = 1000$ Н (материал считать идеальным упруго-пластичным, $\tau_т = 1000$ МПа; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа). Влиянием кривизны проволоки пружины на величину и распределение напряжений по сечению пренебречь.

ГЛАВА 6

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

§ 1. ТЕОРИИ НАЧАЛА ТЕКУЧЕСТИ

6.01. Определить коэффициент запаса по текучести для напряженных состояний, изображенных на рис. 6.01 (напряжения даны в МПа). При расчете использовать следующие данные

Предел текучести	Значение $\sigma_т$, МПа, для вариантов				
	а	*б*	*в*	*г*	*д*
$\sigma_{т.р}$	400	300	400	500	2500
$\sigma_{т.с}$	500	300	500	600	3000

6.02. Даны эпюры изгибающих и крутящих моментов, возникающих в брусе постоянного круглого поперечного сечения (рис. 6.02). Определить положение наиболее напряженного сечения, воспользовавшись теорией начала текучести наибольших касательных напряжений.

6.03. Сравнить массы равнопрочных брусьев, показанных на рис. 6.03, выполненных из одинакового пластичного материала (расчет вести по так называемой энергетической теории начала текучести).

6.04. При каком соотношении между моментами M_1 и M_2 (рис. 6.04) коэффициенты запаса по текучести двух одинаковых брусьев круглого поперечного сечения будут равны, если а) $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с}$; б) $\sigma_{т.р} = 0{,}75\sigma_{т.с}$; в) $\sigma_{т.р} = 0{,}5\sigma_{т.с}$?

6.05. Определить положение наиболее напряженной точки в брусе, нагруженном изгибающими и крутящими моментами, для различных форм поперечных сечений (рис. 6.05).

6.06. Определить положение наиболее напряженного сечения бруса малой кривизны, изображенного на рис. 6.06, если он имеет

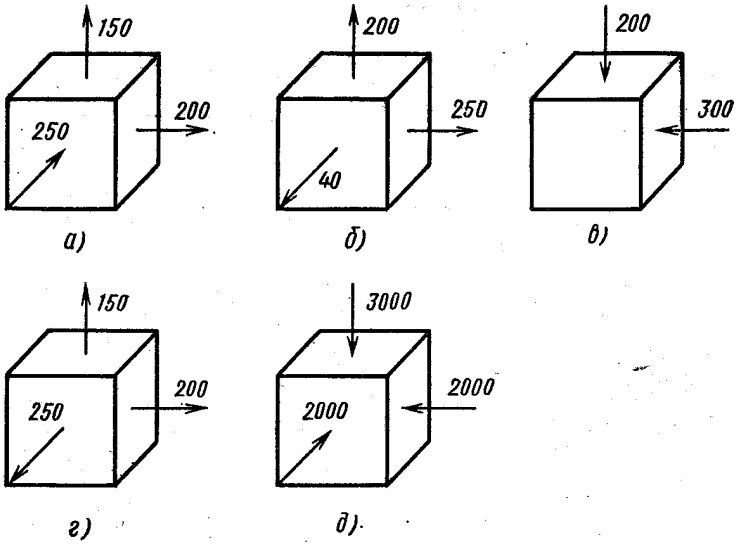


Рис. 6.01

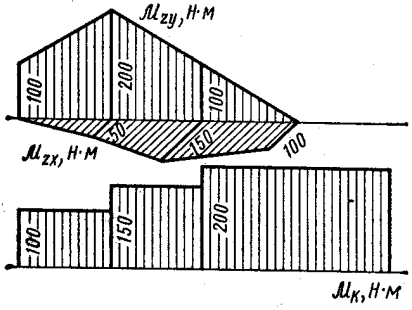


Рис. 6.02

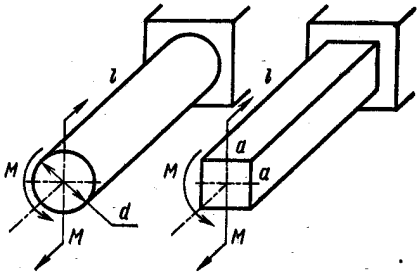


Рис. 6.03

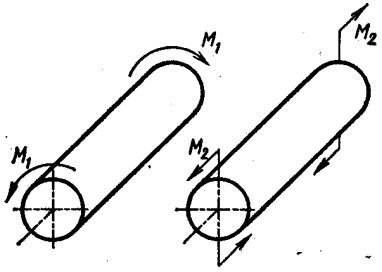


Рис. 6.04

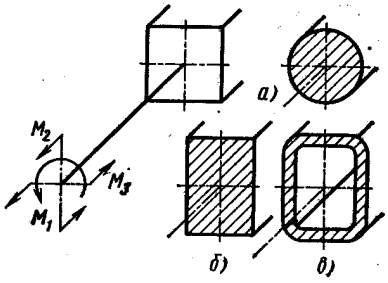


Рис. 6.05

а) круглое или б) прямоугольное поперечное сечение. Расчет вести по теории начала текучести Мора; $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с}$.

6.07. При каком соотношении между диаметрами D и d все участки вала, изображенного на рис. 6 07, равнопрочны (использовать теорию начала текучести Хубера—Мизеса). Дано: M = = 120 Н·м; p = 100 МПа; d = = 20 мм.

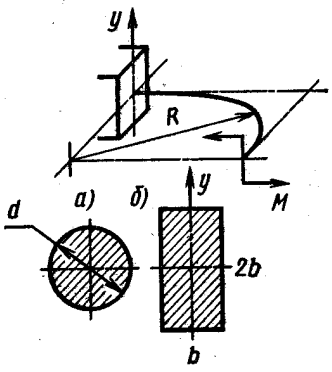


Рис. 6.06

6.08. Определить коэффициент запаса по текучести образца

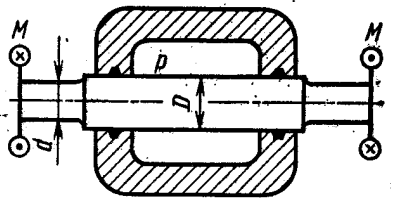


Рис. 6.07

AB, помещенного в камеру высокого давления и нагруженного моментом M (рис. 6.08). Момент сил трения на торце захвата A и в уплотнении C равен $0{,}3M$. Материал бруса легированная сталь, $\sigma_{т.р}$ = 600 МПа; $\sigma_{т.с}$ = 800 МПа; d = 20 мм; M = 500 Н·м; p = 100 МПа.

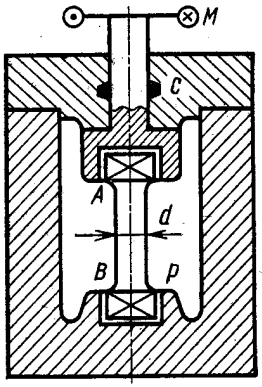


Рис. 6.08

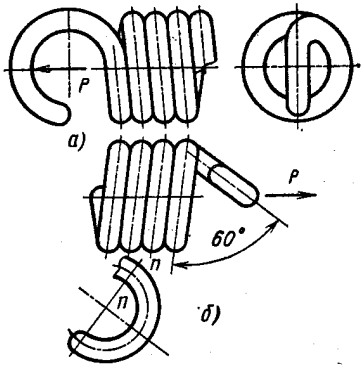


Рис. 6.09

6.09. Сравнить прочность двух вариантов конструкции зацепа пружин растяжения, изображенных на рис. 6.09. Для расчета воспользоваться теорией начала текучести Мора, $\nu_т = 1$. Зацеп можно рассматривать как брус малой кривизны.

6.10. Два весьма жестких диска связаны между собой с помощью восьми одинаковых стальных стержней квадратного попе-

речного сечения (рис. 6.10). Определить коэффициент запаса по теории начала текучести Хубера—Мизеса при взаимном повороте дисков в своей плоскости на угол $\varphi = 8°$. Дано: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0{,}25$; $R = 25$ мм; $l = 200$ мм; $a = 6$ мм; $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 800$ МПа. Считать, что стержни вставлены в диски без зазоров.

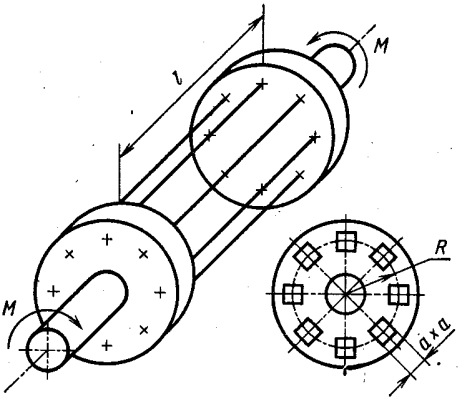


Рис. 6.10

6.11. Деталь, изображенная на рис. 6.11, нагружена моментами M. Считая торцовые участки весьма жесткими по сравнению с тонкими пере-

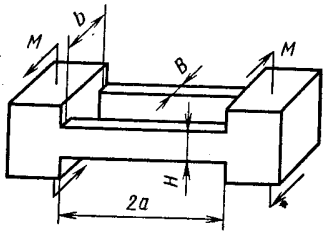


Рис. 6.11

мычками, определить их взаимный угол поворота φ и коэффициент запаса детали по текучести. Дано: $a = 100$ мм; $b = 50$ мм; $H = 20$ мм; $B = 10$ мм; $M = 80$ Н·м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0{,}25$; $\sigma_{т.р} = 300$ МПа; $\nu_т = 0{,}8$.

6.12. Определить коэффициент запаса по текучести полукольца круглого поперечного сечения при соединении его свободного

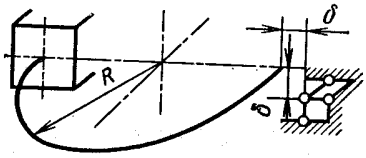


Рис. 6.12

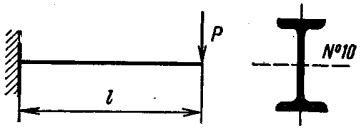


Рис. 6.13

конца с шаровым шарниром (рис. 6.12). Дано: $R = 100$ мм; $d = 10$ мм; $\delta = 5$ мм; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0{,}25$; $\sigma_{т.р} = 1000$ МПа; $\sigma_{т.с} = 1400$ МПа (пружинная сталь).

6.13. Показать, что учет касательных напряжений при поперечном изгибе балки двутаврового поперечного сечения (рис. 6.13) не вносит существенного изменения в оценку ее прочности. Принять двутавр № 10 по ГОСТ 8239—72; $P = 8$ кН; $l = 1$ м; материал пластичный; $\nu_т = 1$.

§ 2. ТЕОРИЯ НАЧАЛА РАЗРУШЕНИЯ

6.14. Напряженное состояние наиболее опасной точки детали, находящейся в условиях простого нагружения, показано на рис. 6.14 (напряжения даны в МПа). Определить коэффициент запаса по разрушению $n_в$, используя следующие данные.

Предел прочности	Значение $\sigma_в$, МПа, для вариантов				
	а	*б*	*в*	*г*	*д*
$\sigma_{в.р}$	390	400	500	500	2200
$\sigma_{в.с}$	650	—	800	700	2750

В варианте *б* материал пластичный, при сжатии не разрушается.

6.15. Определить коэффициент запаса по разрушению сплошного образца диаметром d, помещенного в камеру высокого давле-

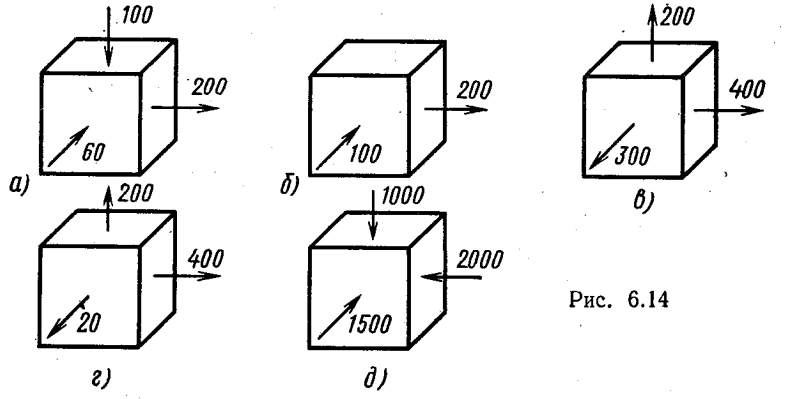


Рис. 6.14

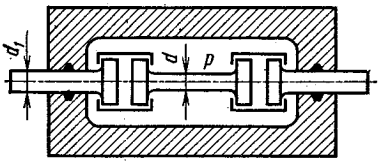


Рис. 6.15

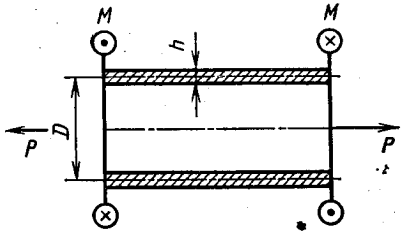


Рис. 6.16

ния (рис. 6.15). Материал образца хрупкий (ковкий чугун), местное сужение в зоне разрушения («шейка») практически отсутствует. Трением в уплотнениях пренебречь. Дано: $d = 8$ мм; $d_1 = 12$ мм; $p = 200$ МПа; $\sigma_{в.р} = 500$ МПа; $\sigma_{в.с} = 1700$ МПа.

6.16. Определить коэффициент запаса по разрушению тонкостенной трубки (рис. 6.16), нагруженной скручивающими моментами M и растягивающими силами P. Материал трубки хрупкий, нагружение простое. Дано: $D = 40$ мм; $h = 2$ мм; $M = 500$ Н·м; $P = 25$ кН; $\sigma_{в.р} = 500$ МПа; $\sigma_{в.с} = 700$ МПа. Как изменится ответ, если сила P постоянна, а момент может увеличиваться?

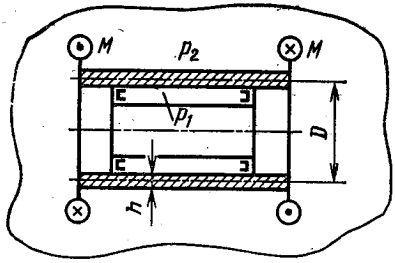


Рис. 6.17

6.17. Тонкостенная трубка (рис. 6.17) нагружена скручивающими моментами M и различными внутренним p_1 и наружным p_2 давлениями. Внутри трубки находится сердечник, снабженный уплотнительными кольцами. Определить коэффициент запаса по разрушению, если $D = 60$ мм, $h = 1$ мм; $M = 500$ Н·м; $p_1 = 105$ МПа; $p_2 = 100$ МПа; материал хрупкий; $\sigma_{в.р} = 400$ МПа; $\sigma_{в.с} = 600$ МПа. Подсчитать момент и давления, при которых происходит разрушение трубки. Нагружение простое. Трением между сердечником и трубкой пренебречь.

6.18. Образец из закаленной стали У10 ($\sigma_{в.р} = 1600$ МПа; $\sigma_{в.с} = 2500$ МПа) нагружается моментами M и внешним давлением

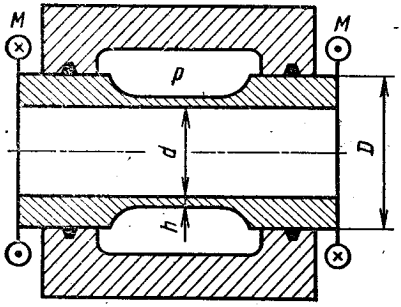


Рис. 6.18

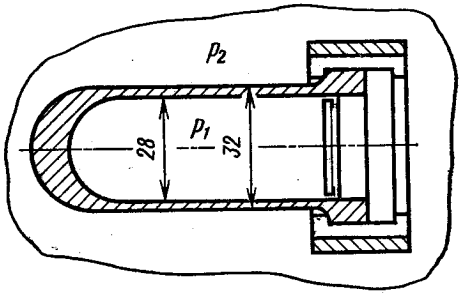


Рис. 6.19

p (рис. 6.18). Определить коэффициент запаса по разрушению, если $d_{ср} = 31$ мм; $D = 60$ мм; $h = 1$ мм; $M = 400$ Н·м; $p = 20$ МПа. Нагружение простое.

6.19. Стеклянный баллон (рис. 6.19) находится под действием внутреннего p_1 и наружного p_2 давлений. Определить коэффициент запаса по разрушению, считая нагружение простым. Дано: $D_{ср} = 30$ мм; $h = 2$ мм; $p_1 = 80$ МПа; $p_2 = 70$ МПа; $\sigma_{в.р} = 50$ МПа; $\sigma_{в.с} = 1000$ МПа. Влиянием днища на прочность цилиндрической части баллона пренебречь.

ГЛАВА 7

РАСЧЕТ ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

7.01. На основе общих уравнений расчета пластины, изображенной на рис. 7.01, построить эпюры внутренних изгибающих моментов $\mathcal{M}_r$ и $\mathcal{M}_t$, определить наибольшее эквивалентное напряжение по теории начала текучести Мора, нарисовать форму срединной поверхности деформированной пластины и подсчитать максимальный прогиб, если 1) $m_1 = 0$; $m_2 = m$; 2) $m_1 = m$; $m_2 = 0$; 3) $m_1 = m_2 = m$; 4) $m_1 = -m$; $m_2 = m$. В случае 1 особо рассмотреть напряженно-деформированное состояние пластины, когда $r_1 = 0$ и $r_1 \to 0$. В этом же случае сравнить напряжения в пластине при $r_1 \to r_2$ с напряжениями, определяемыми по формулам изгиба бруса малой кривизны. Принять $r_1 = 40$ мм; $r_2 = 100$ мм; $h = 5$ мм; $m = 500$ Н·м/м; $\mu = 0{,}3$; $\nu_т = 1$.

7.02. Расположить пластину на шарнирной опоре в реальных условиях можно только при наличии консольного участка (рис. 7.02), что приведет к изменению расчетной жесткости. Оценить эту ошибку для пластины радиусом r_0, нагруженной сосредоточенной силой, если $R = 1{,}1r_0$. Какое конструктивное мероприятие можно предложить для уменьшения ошибки?

7.03. Для определения расхода жидкости или газа по методу замера перепада давления применяют плоскую диафрагму, представляющую собой тонкую круглую пластину с центральным отверстием (рис. 7.03). Защемляющие фланцы можно считать абсолютно жесткими. Расчетная схема показана на рис. 7.03. Определить наибольшие эквивалентное напряжение и прогиб. Дано: $r_1 = 40$ мм; $r_2 = 100$ мм; $h = 4$ мм; $p = 0{,}3$ МПа; материал диафрагмы сталь. Использовать теорию начала текучести Мора, $\nu_т = 1$.

7.04. Определить коэффициент запаса по текучести пластины (рис. 7.04), разделяющей две камеры, в одной из которых давление $p_1 = 101$ МПа, в другой $p_2 = 100$ МПа. Материал пластины сталь, $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 600$ МПа; $D = 400$ мм; $h = 10$ мм.

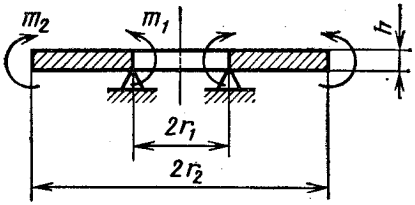


Рис. 7.01

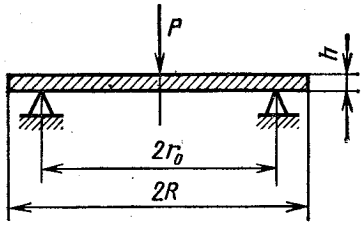


Рис. 7.02

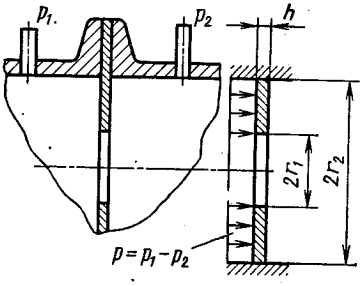


Рис. 7.03

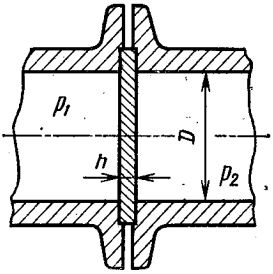


Рис. 7.04

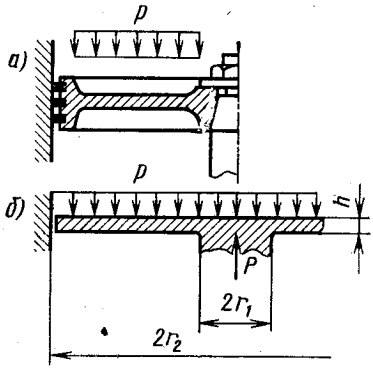


Рис. 7.05

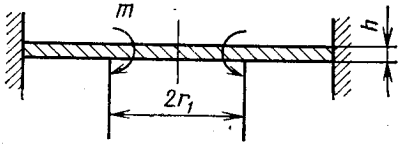


Рис. 7.06

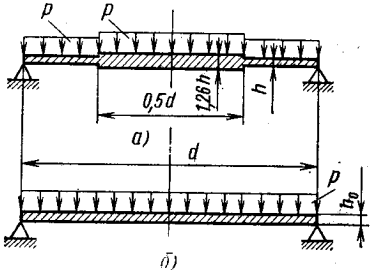


Рис. 7.07

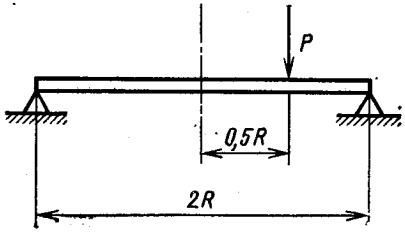


Рис. 7.08

7.05. На рис. 7.05 изображен эскиз (*а*) и расчетная схема (*б*) поршня воздуходувки. Построить эпюры внутренних изгибающих моментов, определить наибольшие эквивалентное напряжение по теории начала текучести Мора и прогиб. Шток считать абсолютно жестким, края поршня скользят без трения по поверхности цилиндра. Дано: $r_2 = 200$ мм; $r_1 = 40$ мм; $h = 20$ мм; $p = 0{,}3$ МПа; материал сталь; $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с}$.

7.06. Для пластины, изображенной на рис. 7.06, построить эпюры внутренних моментов и определить уравнение срединной поверхности деформированной пластины (при построении эпюр принять $r_2 : r_1 = 2$, $\mu = 0{,}3$).

7.07. Сравнить наибольшие напряжения и прогибы в пластинах, изображенных на рис. 7.07, выполненных из одинакового материала и имеющих одинаковую массу. Собственный вес пластин по сравнению с равнодействующей сил давления пренебрежимо мал.

7.08. Определить прогиб w_0 в центре тонкой круглой пластины радиуса R, постоянной толщины h, опертой по контуру и нагруженной сосредоточенной силой P, приложенной на расстоянии $0{,}5R$ от центра (рис. 7.08).

ГЛАВА 8

РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

§ 1. ЗАДАЧИ БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК

8.01. Определить наибольшее касательное напряжение в тонкостенной сферической оболочке, нагруженной внутренним давлением p. Диаметр оболочки d, толщина стенки h.

8.02. Тонкостенный цилиндрический сосуд с полусферическими днищами (рис. 8.01) нагружен внутренним давлением p. Каково должно быть соотношение между толщинами стенок h_1 и h_2, чтобы в зоне перехода от цилиндра к сфере не возникало напряжений изгиба?

8.03. Определить эквивалентное напряжение по теории начала текучести Мора для тонкостенной сферической оболочки, подверженной действию давлений $p_1 = 106$ МПа и $p_2 = 100$ МПа (рис. 8.02). Подсчитать изменение диаметра оболочки. Дано: $D = 120$ мм; $h = 1{,}5$ мм; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0{,}3$; $\nu_т = 1$.

8.04. Резина, наполняющая внутреннюю полость латунной трубки диаметром $D_{ср} = 200$ мм, с толщиной стенки $h = 1$ мм, сжимается в осевом направлении напряжением $\sigma_z = 1$ МПа (рис. 8.03). Определить изменение диаметра трубки и возникающие в ней напряжения. Упругие постоянные резины: $E = 10$ МПа, $\mu = 0{,}45$; латуни: $E = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа.

8.05. Для определения коэффициента сжимаемости жидкости k применяется приспособление, схема которого изображена на рис. 8.04. Исследуемая жидкость в колбе A помещается в камеру высокого давления B. Поршень C, свободно перемещающийся внутри тонкой трубки, разделяет жидкость в колбе и жидкость, заполняющую камеру высокого давления. Давление p в колбе и камере одинаково. При изменении давления поршень перемещается по трубке. Ход поршня δ в основном зависит от сжимаемости жидкости. Определить коэффициент сжимаемости керосина, если при $\Delta p = 1$ МПа $\delta = 62{,}2$ мм. Колба стеклянная: $E = 7 \cdot 10^4$ МПа; $\mu = 0{,}25$; $D = 50$ мм; $d = 1$ мм. Деформацией

трубки можно пренебречь. Чему равна ошибка, если колбу считать несжимаемой?

Указание. Коэффициентом сжимаемости жидкости называется объемная деформация, отнесенная к единице давления.

8.06. Для тарировки тензодатчиков омического сопротивления используется тонкостенный цилиндр, нагруженный давлением

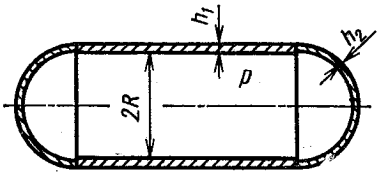


Рис. 8.01

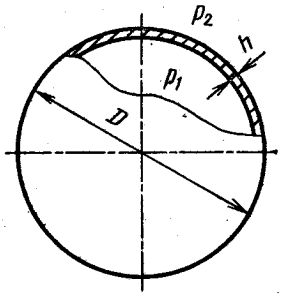


Рис. 8.02

газа (рис. 8.05). Выбрать рациональную схему наклеивания датчика и для этой схемы получить зависимость для определения цены деления α электронного измерителя деформации. Размеры цилиндра и силы P считать известными.

8.07. Определить коэффициенты запаса по текучести в сечениях

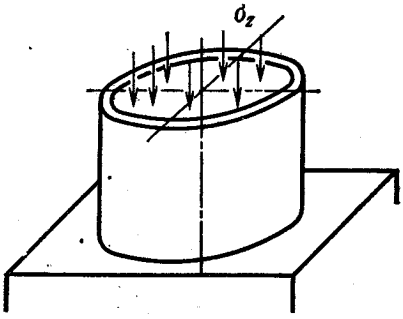


Рис. 8.03

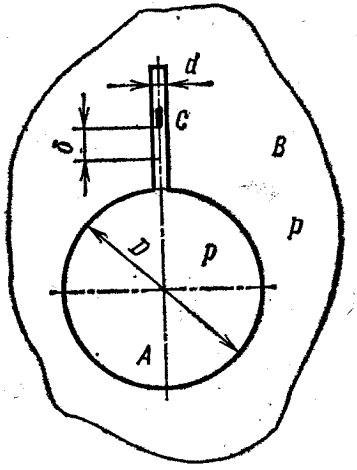


Рис. 8.04

$n—n$ и $m—m$ детали стального трубопровода (рис. 8.06), заполненного жидкостью под давлением p. Фланец A нагружен парой сил, момент которой M. Дано: $D = 50$ мм; $h = 1$ мм; $p = 4$ МПа; $M = 150$ Н·м; $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 250$ МПа.

8.08. Длинная тонкостенная труба паропровода среднего диаметра $D_{ср} = 200$ мм с толщиной стенки $h = 5$ мм лежит на ряде равноотстоящих опор (рис. 8.07). Определить коэффициент запаса по текучести $n_т$, если давление пара $p = 5$ МПа, погонный вес

трубы с изоляцией $q = 2{,}5$ кН/м, длина пролета $l = 5$ м. Материал трубы сталь, $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 250$ МПа.

8.09. Цилиндрическая колонна (рис. 8.08) залита жидкостью с удельным весом $\gamma = 10^4$ Н/м^3 (вода). Построить эпюры σ_m и σ_t по высоте колонны для трех случаев: а) колонна доверху заполнена жидкостью, кран A закрыт, кран B открыт; б) колонна доверху заполнена жидкостью, крышка и кран B плотно

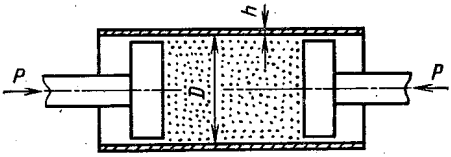


Рис. 8.05

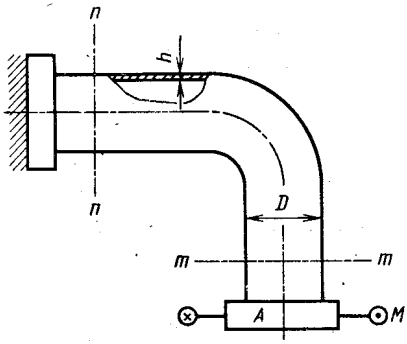


Рис. 8.06

закрыты, при заполнении через кран B был удален весь воздух, а затем оба крана закрыты; в) колонна полностью заполнена жидкостью, крышка и кран B плотно закрыты, после чего открыт кран A. Дано: $D = 1$ м; $H = 15$ м; $h = 5$ мм.

8.10. Для тонкостенных сосудов, изображенных на рис. 8.09, построить эпюры напряжений σ_m и σ_t, возникающих в стенках сосудов. Сосуд заполнен: *а* — жидкостью; *б* — газом,

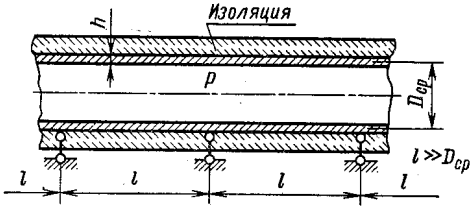


Рис. 8.07

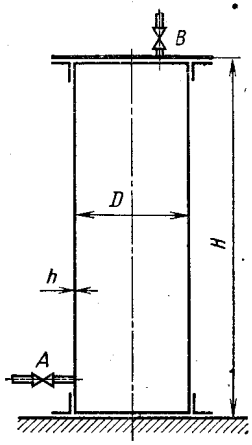


Рис. 8.08

находящимся в условиях атмосферного давления; *в* — жидкостью и газом, находящимся под давлением p. Удельный вес жидкости во всех случаях γ, весом сосудов пренебречь.

8.11. В тонкостенную короткую медную трубку (рис. 8.10), закрепленную между жесткими неподвижными опорами при температуре $t_1 = 10$ °С, под давлением $p = 1$ МПа подается горячая вода ($t_2 = 60$ °С). Определить коэффициент запаса по текучести трубки, если $\sigma_{т.р} = 100$ МПа; $\sigma_{т.с} = 200$ МПа. Диаметр трубки

$D = 100$ мм; толщина стенки $h = 5$ мм. Стеснением деформаций на торцах в их плоскости пренебречь.

8.12. Тонкостенный стальной баллон (рис. 8.11) диаметром D с толщиной стенки h предназначен для хранения сжатого газа при давлении p. Как изменится коэффициент запаса по текучести, если баллон усилить путем намотки на него по всей длине одного слоя стальной проволоки диаметром d, уложенной виток к витку с начальным

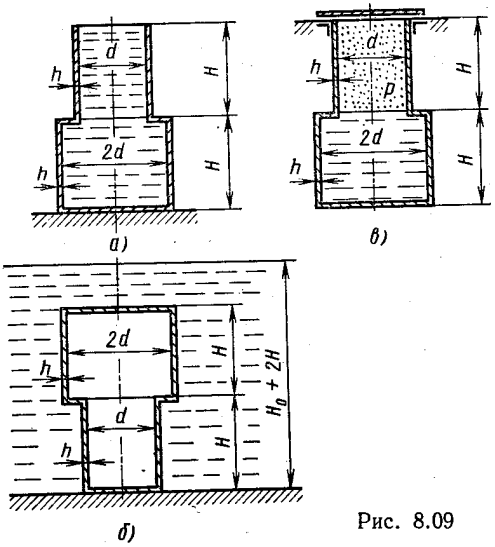


Рис. 8.09

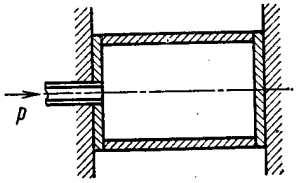


Рис. 8.10

натяжением N_0. Дано: $D = 120$ мм; $h = 3$ мм; $p = 10$ МПа; $d = 1$ мм; $N_0 = 400$ Н; предел текучести материала баллона $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 280$ МПа; предел текучести проволоки $\sigma_т = 1600$ МПа; коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$.

8.13. Определить изменение объема, ограниченного тонкостенной сферической оболочкой, при действии сжимающих сил T (рис. 8.12). Размеры оболочки D и h,

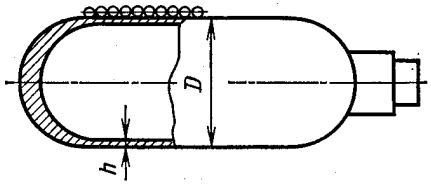


Рис. 8.11

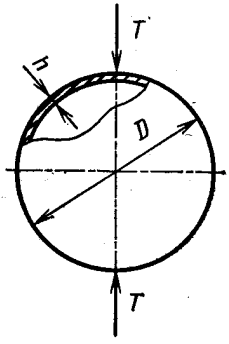


Рис. 8.12

характеристики упругих свойств материала E и μ известны. Для решения использовать теорему о взаимности работ.

8.14. Тонкостенный полый валик диаметром d с толщиной стенки $h = d/20$ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своей оси (рис. 8.13). Концы его закреплены в упорных

подшипниках так, что длина валика не меняется. Определить напряженное состояние в точках валика, удаленных от концов. Плотность материала валика ρ.

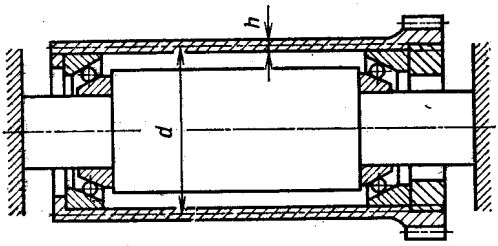


Рис. 8.13

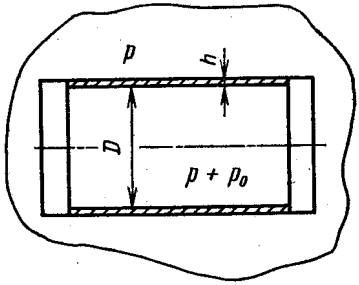


Рис. 8.14

8.15. На тонкостенную трубку, закрытую днищами (рис. 8.14), действуют внутреннее $p_0 + p$ и наружное p давления. Исследовать зависимость эквивалентного напряжения $\sigma_{экв}$ в трубке по теории начала текучести Мора от давления p. Дано: $D = 100$ мм; $h = 2$ мм; $p_0 = 5$ МПа; $\nu_г = 1$; p меняется от 0 до 125 МПа.

8.16. На поверхности тонкостенного цилиндрического резервуара диаметром D с толщиной стенки h наклеены тензодатчики омического сопротивления в осевом и окружном направлениях. При испытании резервуара продольная деформация ε_z оказалась равной нулю, а окружная $\varepsilon_t = 5 \cdot 10^{-3}$. Определить давление p, при котором проводилось испытание, если $D = 1$ м, $h = 0{,}01$ м. Диаграмма деформирования материала резервуара дана на рис. 8.15. Принять коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}5$.

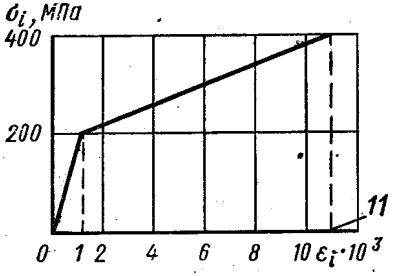


Рис. 8.15

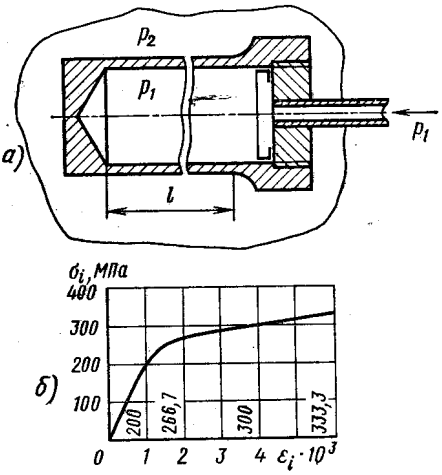


Рис. 8.16

8.17. Тонкостенная трубка (рис. 8.16, *а*) диаметром $D_{ср} = 50$ мм с толщиной стенки $h = 1$ мм находится под действием

внутреннего давления $p_1 = 215$ МПа и наружного $p_2 = 200$ МПа. Определить изменение длины базы $l = 200$ мм и диаметра трубки. Диаграмма деформирования материала дана на рис. 8.16, *б*; $\mu = 0{,}5$. Нагружение простое.

8.18. Определить изменение диаметра ΔD_1 сферической оболочки диаметром D с толщиной стенки h при увеличении внутреннего давления от 0 до p_1. Характеристика материала оболочки показана на рис. 8.17. Подсчитать изменение диаметра $\Delta D_{ост}$ после снятия давления и ΔD_2 при вторичном нагружении давлением p_2. Дано: $D : h = 20$; $p_1 = 0{,}3\sigma_т$; $p_2 = 0{,}2\sigma_т$; $\mu = 0{,}5$.

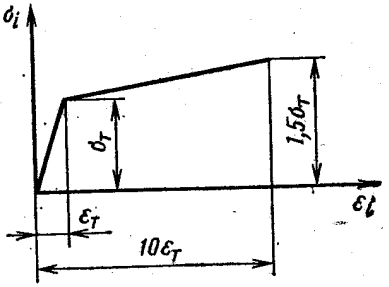


Рис. 8.17

8.19. Определить изменение радиуса ΔR тонкостенной сферической оболочки, нагруженной внутренним давлением, используя равенство работы внешних сил потенциальной энергии деформации. Размеры оболочки и упругие характеристики материала считать известными, деформации — линейно-упругими.

§ 2. ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА

8.20. Весьма жесткое кольцо A свободно, но плотно надето на упругую стальную тонкостенную трубку (рис. 8.18). Определить силу взаимодействия между кольцом и трубкой, при нагружении последней внутренним давлением $p = 5$ МПа. Дано: $R = 100$ мм; $h = 5$ мм.

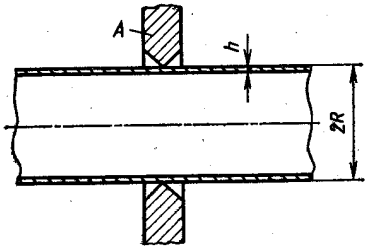


Рис. 8.18

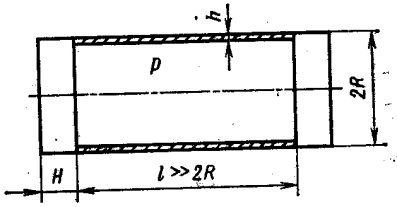


Рис. 8.19

8.21. Тонкостенный цилиндр с весьма жесткими днищами (рис. 8.19) находится под действием внутреннего давления p. Построить эпюры радиальных перемещений и внутренних силовых факторов в области, примыкающей к днищу. Определить наибольшее эквивалентное напряжение по теории начала текучести Мора. Дано: $R = 100$ мм; $h = 5$ мм; $p = 5$ МПа; $\mu = 0{,}3$; $E =$

$= 2 \cdot 10^5$ МПа. Цилиндр считать достаточно длинным, так что влиянием одного торца на другой можно пренебречь.

8.22. Решить предыдущую задачу, считая днище упругим, приняв толщину $H = 4h$.

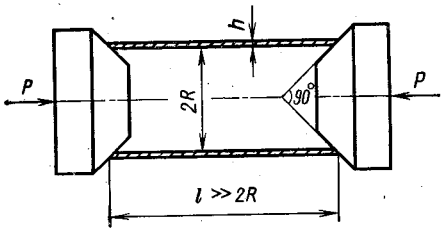


Рис. 8.20

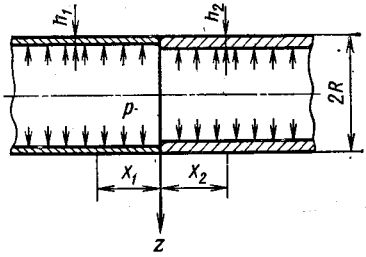


Рис. 8.21

8.23. Тонкостенная стальная трубка сжимается силами P, приложенными к коническим шайбам (рис. 8.20). Определить наибольшее эквивалентное напряжение по теории начала текучести Мора, возникающее в трубке. Шайбы считать весьма жесткими, трубку достаточно длинной. Дано: $R = 100$ мм; $h = 5$ мм; $P = 30$ кН; $\nu_т = 1$. Коэффициент трения по поверхности контакта шайбы с трубкой $f = 0{,}2$.

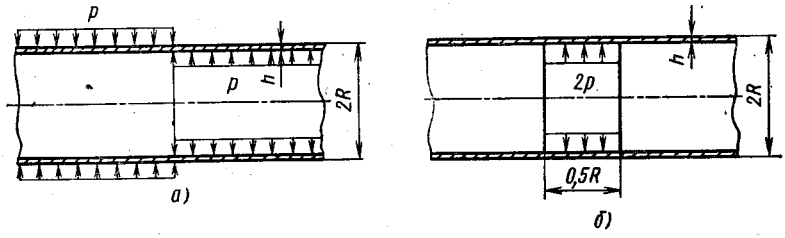


Рис. 8.22

8.24. Определить наибольшее эквивалентное напряжение в зоне скачкообразного изменения толщины тонкостенной трубки (рис. 8.21), нагруженной внутренним давлением. Дано: $R = 100$ мм; $h_1 = 2{,}5$ мм; $h_2 = 5$ мм; $p = 2{,}5$ МПа; материал сталь; $\mu = 0{,}3$; $\nu_т = 1$. Для расчета использовать теорию начала текучести Мора.

8.25. Построить эпюры радиальных перемещений w и внутренних изгибающих моментов $\mathscr{M}_x$, возникающих в тонкостенной трубе, нагруженной переменным давлением (рис. 8.22, *а*). Использовать полученное решение для расчета при нагружении по схеме рис. 8.22, *б*. Принять $R/h = 20$; $\mu = 0{,}3$.

ГЛАВА 9

РАСЧЕТ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ И ДИСКОВ

§ 1. РАСЧЕТ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ В ПРЕДЕЛАХ УПРУГОСТИ

9.01. Определить коэффициент запаса по текучести толстостенной трубы (рис. 9.01), нагруженной внутренним p_1 и внешним p_2 давлениями. Дано: $p_1 = 300$ МПа; $p_2 = 100$ МПа; $r_1 = 30$ мм; $r_2 = 50$ мм; материал трубы легированная сталь; $\sigma_{т.р} = 700$ МПа; $\nu_т = 0{,}8$.

9.02. Определить коэффициент запаса по текучести змеевика — компенсатора (рис. 9.02), выполненного из толстостенного стального капилляра (трубки), передающего давление $p = 200$ МПа. Диаметр компенсатора $D = 400$ мм, размеры трубки: внешний диаметр $d = 10$ мм, внутренний диаметр $\Delta = 2$ мм. Наибольшее усилие, растягивающее компенсатор, $P = 200$ Н. Материал трубки низколегированная конструкционная сталь, $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 450$ МПа.

9.03. Толстостенная труба нагружена внутренним давлением p и моментами M (рис. 9.03). Определить, при каком соотношении между моментом и давлением коэффициенты запаса во внутренних и внешних точках трубы одинаковы. Расчет вести по теории начала текучести Хубера—Мизеса (так называемой энергетической).

9.04. Определить коэффициент концентрации α в окрестности малого отверстия при всестороннем равномерном растяжении пластины постоянной толщины (рис. 9.04).

Указание. Под коэффициентом концентрации в данном случае следует понимать отношение наибольшего эквивалентного напряжения в зоне концентратора к эквивалентному напряжению в пластине без отверстия.

9.05. Пластина постоянной толщины h имеет отверстие, диаметр которого много меньше ее размеров (рис. 9.05). Подсчитать потенциальную энергию деформации пластины, нагруженной давлением p, равномерно распределенным по поверхности отверстия. Упругие характеристики материала считать известными.

9.06. Стальной штифт вставлен плотно, без натяжения в отверстие стальной плиты постоянной толщины. Размер плиты

в плане много больше диаметра штифта (рис. 9.06). Определить напряжения, возникающие в плите и штифте при равномерном сжатии последнего. Подсчитать наибольшее эквивалентное напряжение в конструкции, используя теорию начала текучести Мора и считая $\nu_т = 1$. Трением по поверхности отверстия пренебречь.

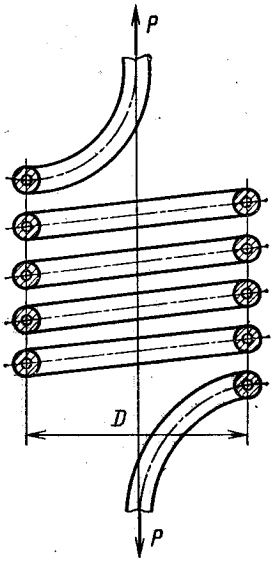


Рис. 9.02

9.07. Диск постоянной толщины, вложенный в весьма жесткое отверстие, подвергается воздействию внутреннего давления p (рис. 9.07). Построить эпюры напряжений σ_r и σ_t, возникающих

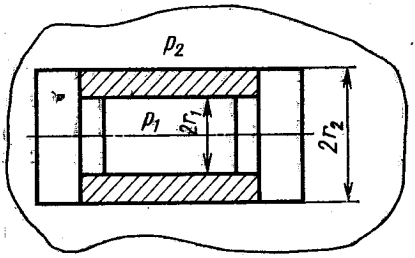


Рис. 9.01

в диске, и подсчитать наибольшее эквивалентное напряжение, если $\sigma_{т.р} = 0{,}7\sigma_{т.с}$, $\mu = 0{,}3$.

9.08. Медная трубка, заполненная ртутью при давлении 0,1 МПа, подвергается всестороннему обжатию давлением p.

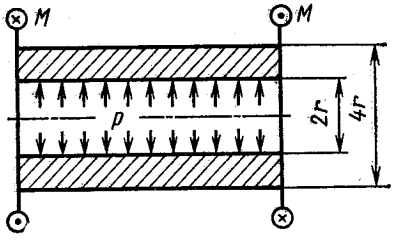


Рис. 9.03

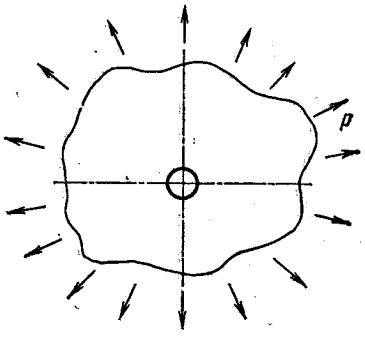


Рис. 9.04

Определить давление ртути в условиях обжатия, если внутренний радиус трубки $r_1 = 10$ мм; наружный радиус $r_2 = 30$ мм; $p = 100$ МПа; $E = 10^5$ МПа; $\mu = 0{,}25$; коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 3{,}9 \cdot 10^{-5}$ 1/МПа. Деформацией днищ пренебречь.

9.09. На цилиндр диаметром $d = 100$ мм в горячем состоянии надета втулка с толщиной стенки $h = 50$ мм. Внутренний диаметр втулки до нагревания был на $0{,}002d$ меньше диаметра цилиндра. Построить эпюры напряжений, возникающих в цилиндре и втулке после остывания соединения. Материал деталей сталь.

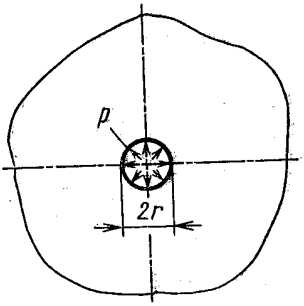


Рис. 9.05

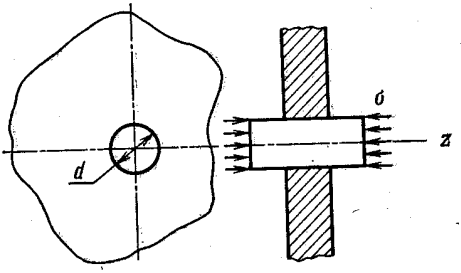


Рис. 9.06

9.10. Бронзовый цилиндр, внешний диаметр которого $d_2 = 400$ мм, а внутренний $d_1 = 200$ мм, находится под действием внутреннего давления $p = 40$ МПа. Определить коэффициент запаса по текучести, пользуясь теорией Мора, если $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 90$ МПа. Как изменится коэффициент запаса конструкции,

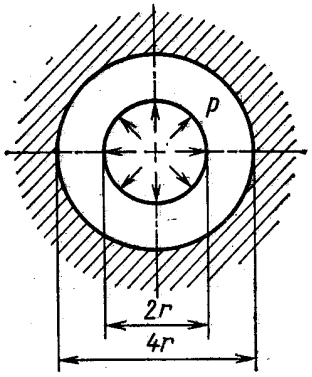


Рис. 9.07

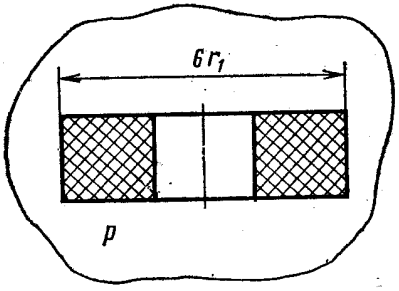


Рис. 9.08

если на бронзовый цилиндр надеть плотно без натяга стальной цилиндр с толщиной стенки $h = 50$ мм? Предел текучести стали $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 300$ МПа. Принять для бронзы $\mu = 0{,}25$; для стали $\mu = 0{,}30$.

9.11. Внутренний диаметр стального двухслойного орудийного ствола $d_1 = 100$ мм, наружный $d_2 = 300$ мм, диаметр контактной поверхности слоев $d_к = 173$ мм, натяг на радиус $\Delta =$

$= 0{,}0865$ мм. Определить напряжения, возникающие в стенке ствола при действии внутреннего давления $p = 200$ МПа. Подсчитать коэффициент запаса по текучести, пользуясь теорией Мора, если $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 600$ МПа. Сравнить полученный результат с коэффициентом запаса подобного сплошного ствола.

Примечание. Размеры ствола и натяг рассчитаны из условий оптимальности конструкции в учебнике В. И. Феодосьева «Сопротивление материалов», изд. 8-е, пример 9.2.

9.12. Определить напряженное состояние эбонитового кольца и вставленной в него плотно, но без натяга, стальной пробки, находящихся под действием всестороннего давления p (рис. 9.08). Диаметр стальной пробки $2r_1$; $E_{ст} = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu_{ст} = 0{,}3$; $E_{эб} = 300$ МПа; $\mu_{эб} = 0{,}45$.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ТРУБЕ ИЗ УПРУГО-ПЛАСТИЧНОГО МАТЕРИАЛА

9.13. Для передачи жидкости под давлением $p = 400$ МПа используется стальной капилляр — трубка с размерами $D = 10$ мм, $d = 2$ мм. Определить коэффициенты запаса по текучести $n_т$ и по несущей способности n, считая материал трубки идеальным упруго-пластичным, $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 250$ МПа. Подсчитать радиус $r_т$ поверхности, отделяющей упругую зону от упруго-пластичной.

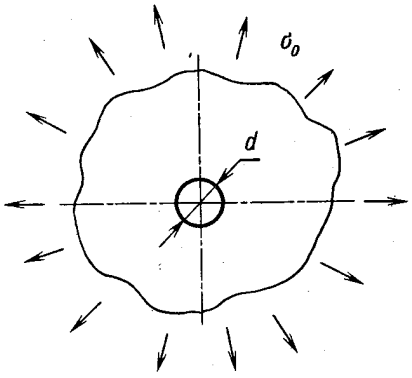


Рис. 9.09

9.14. Толстостенная труба с днищами нагружена внутренним давлением p. Определить радиальные перемещения точек внутренней u_1 и наружной u_2 поверхностей трубы при давлении $p_т$, вызывающем первые пластические деформации, и предельном давлении $p_{пр}$. Дано: $r_1 = 50$ мм; $r_2 = 100$ мм; материал идеальный упруго-пластичный; $\sigma_т = 200$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0{,}5$.

9.15. Труба с днищами, имеющая размеры $r_1 = 5$ мм, $r_2 = 20$ мм, нагружена внутренним давлением. Построить эпюры напряжений, возникающих в трубе при предельном значении давления, и остаточных напряжений после разгрузки. Материал идеальный упруго-пластичный; $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 300$ МПа; $\mu = 0{,}5$.

9.16. Труба с днищами с внешним радиусом $r_2 = 3r_1$ (r_1 — внутренний радиус) подвергается автофретированию внутренним давлением так, что радиус упругой зоны $r_т = 2r_1$. Построить

эпюры напряжений, возникающих в этой трубе при действии рабочего внутреннего давления $p = 0{,}8\sigma_т$. Материал трубы идеальный упруго-пластичный; $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = \sigma_т$; $\mu = 0{,}5$. Определить коэффициент запаса по текучести $n_т$.

9.17. Тонкая плита с отверстием, диаметр которого много меньше ее размеров, равномерно растянута (напряжение σ_0, рис. 9.09). Построить эпюры напряжений σ_r и σ_t в зоне отверстия при $\sigma_0 = 150$ МПа. Материал плиты идеальный упруго-пластичный; $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = \sigma_т = 200$ МПа; $\mu = 0{,}5$.

Указание. Для решения воспользоваться условием текучести наибольших касательных напряжений ($\sigma_i = \sigma_1 - \sigma_3$).

§ 3. РАСЧЕТ ДИСКОВ

9.18. Диск (рис. 9.10), выполненный из стали 45 ($\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 300$ МПа), вращается равномерно с частотой 5000 об/мин. Определить коэффициент запаса по текучести, используя теорию Хубера—Мизеса. Размеры диска $a = 50$ мм, $b = 300$ мм. Принять $\mu = 0{,}3$; плотность $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

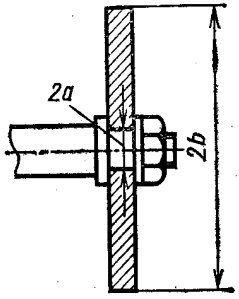


Рис. 9.10

Указание. В данном случае под коэффициентом запаса целесообразно понимать отношение угловой скорости, при которой возникают первые пластические деформации, к рабочей угловой скорости.

9.19. Стеклянный диск (см. рис. 9.10) вращается с постоянной угловой скоростью. Считая, что стекло остается линейно упругим вплоть до разрушения, определить частоту вращения вала, при которой диск разрушится. Дано: $a = 40$ мм; $b = 200$ мм; $\mu = 0{,}2$; $\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3; $\sigma_{в.р} = 200$ МПа; $\sigma_{в.с} = 600$ МПа.

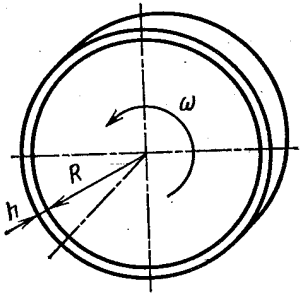


Рис. 9.11

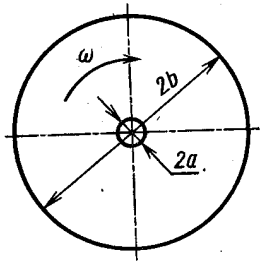


Рис. 9.12

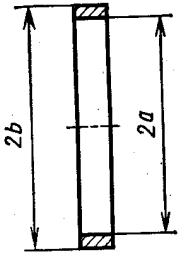


Рис. 9.13

9.20. К эбонитовому диску (рис. 9.11) привулканизовано стальное кольцо (бандаж). Определить напряжения в диске и бандаже при равномерном вращении конструкции с угловой скоростью ω.

Оценить влияние бандажа на прочность диска. Дано: $R = 200$ мм; $h = 10$ мм; $\omega = 400$ с$^{-1}$. Характеристики эбонита: $\mu = 0{,}4$; $E = 300$ МПа; $\rho = 1{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3; стали: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

9.21. Диск постоянной толщины равномерно вращается в своей плоскости с угловой скоростью ω. Построить эпюры напряжений, возникающих в диске, считая $a \ll b$ (рис. 9.12). Как изменятся эти напряжения, если диск сплошной ($a = 0$)? Задачу решить в общем виде.

9.22. Получить зависимости для определения напряжений во вращающемся тонкостенном кольце (рис. 9.13), рассматривая его как частный случай диска с отверстием.

ГЛАВА 10

МЕСТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

10.01. Как влияют на прочность конструкции концентраторы напряжения (некоторые из них показаны на рис. 10.01), если материал детали: а) пластичный, б) хрупкий? Напряжения во времени постоянны.

10.02. Прямоугольная пластина постоянной толщины равномерно растянута в направлении оси z (рис. 10.02). В пластине имеется отверстие, диаметр которого d значительно меньше ширины пластины B. Исследование напряженного состояния в зоне отверстия методами теории упругости приводит к зависимостям

$$\sigma_t = \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{d^2}{4r^2}\right) - \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{3d^4}{16r^4}\right)\cos 2\theta;$$

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2}\left(1 - \frac{d^2}{4r^2}\right) + \frac{\sigma}{2}\left(1 - \frac{d^2}{r^2} + \frac{3d^4}{16r^4}\right)\cos 2\theta;$$

$$\tau_{rt} = -\frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{2d^2}{4r^2} - \frac{3d^4}{16r^4}\right)\sin 2\theta.$$

Используя эти зависимости, построить эпюры напряжений $\sigma_t = \sigma_z$ и $\sigma_r = \sigma_y$ при $\theta = \pi/2$ и напряжений σ_t при $r = d/2$. Подсчитать теоретический коэффициент концентрации напряжений α. Определить наибольшее по модулю значение градиента напряжений σ_t при $\theta = \pi/2$. Вычислить компоненты напряженного состояния и главные напряжения при $r \gg d$.

10.03. Описать качественно изменение напряженного состояния пластины с малым отверстием, растянутой в направлении оси z, если в отверстие свободно, но плотно вставлена упругая пробка (рис. 10.03). Как зависят эти изменения от жесткости пробки?

10.04. Пластина с малым отверстием (рис. 10.04) равномерно растянута напряжением σ_0 в направлении оси z, а по контуру отверстия нагружена давлением p. Определить эквивалентные напряжения по теории начала текучести Мора ($\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с}$)

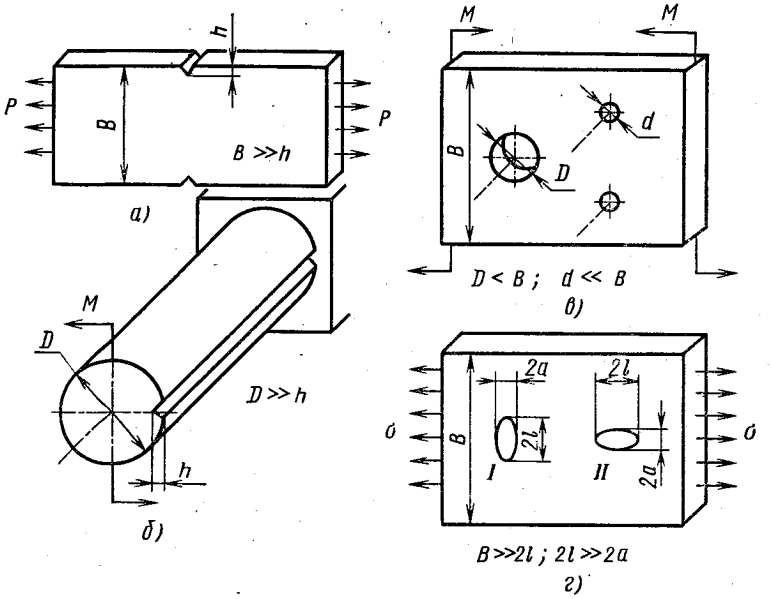


Рис. 10.01

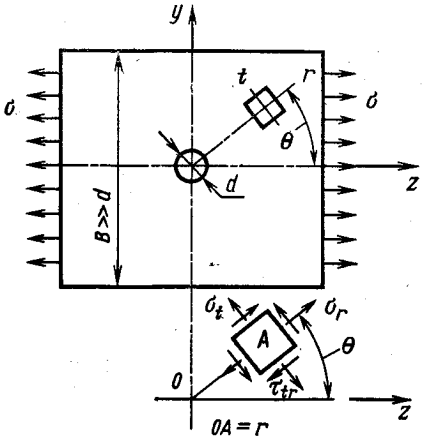


Рис. 10.02

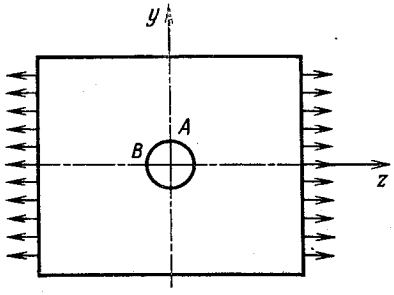


Рис. 10.03

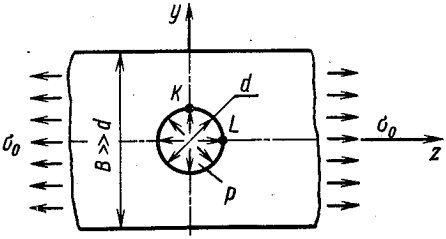


Рис. 10.04

в точках K и L. Подсчитать модуль градиента напряжений σ_z вдоль оси y в точке K. Для решения использовать формулы, приведенные в задаче 10.02.

10.05. Сравнить наибольшие градиенты напряжений, возникающих в прямоугольной пластине шириной B постоянной толщины h при нагружении ее: а) изгибающими моментами M; б) растягивающими силами P при наличии в пластине малого отверстия диаметром d (рис. 10.05). Дано: $B = 30$ мм; $h = 5$ мм; $d = 2$ мм; $M = 150$ Н·м; $P = 10$ кН. Для расчета в случае б использовать формулы, приведенные в задаче 10.02.

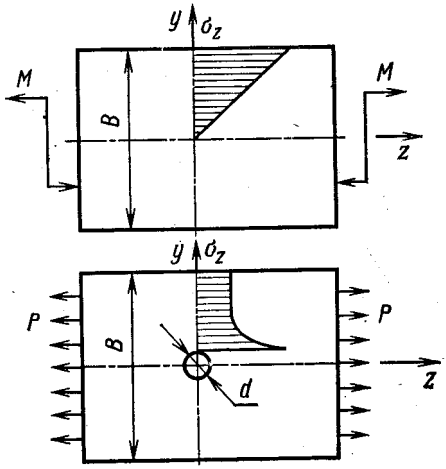


Рис. 10.05

10.06. Тонкостенная трубка (рис. 10.06) диаметром $D_{ср} = 100$ мм с толщиной стенки $h = 1$ мм скручена моментами $M = 800$ Н·м и растянута силами $P = 30$ кН. В трубке просверлено малое отверстие диаметром $d = 5$ мм. Определить теоретический коэффициент концентрации α, считая его равным отношению наибольшего эквивалентного напряжения в зоне отверстия к эквивалентному напряжению вдали от отверстия. Расчет вести по теории начала текучести Мора, $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с}$.

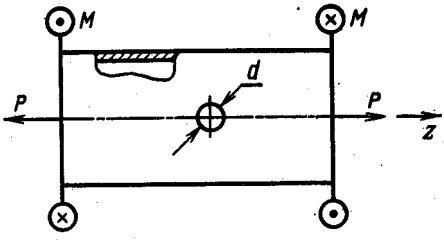


Рис. 10.06

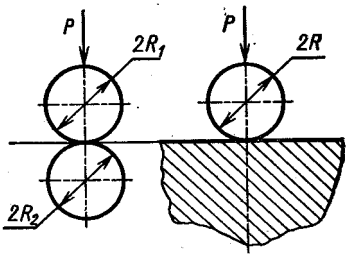


Рис. 10.07

Для определения напряжений в зоне отверстия использовать результаты, полученные при решении задачи 10.02.

10.07. При сдавливании двух шаров радиусами R_1 и R_2 (рис. 10.07) или при обжатии шара на плоскости ($R_2 = \infty$) образуется круговая площадка контакта радиусом a, тела сближаются на величину δ. Давление на площадке контакта распределяется по «закону полусферы», наибольшее давление в центре

площадки равно p_{max}. Зависимости для определения названных величин, полученные методами теории упругости, для случая, когда материал контактирующих тел одинаковый и $\mu = 0{,}3$, имеют вид

$$a = 1{,}109 \sqrt[3]{\frac{P}{E}\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}};$$

$$p_{max} = 0{,}3880 \sqrt[3]{PE^2\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right)^2};$$

$$\delta = 1{,}231 \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}.$$

Сравнить величины a, p_{max}, δ при сжатии двух одинаковых шаров $R_1 = R_2 = R$ и при обжатии шара на плоскости, если $R = 10$ мм; $P = 1$ кН; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

ГЛАВА 11

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОДОЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ ДЛЯ ПРОДОЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

11.01. Весьма жесткий стержень AB соединен с балкой BD и нагружен силой P (рис. 11.01). Определить критическую силу $P_{кр}$, если $a = 200$ мм; $l = 100$ мм; $b = 20$ мм; $h = 4$ мм; материал балки сталь.

11.02. Стержень AB, изгибная жесткость которого EI, одним концом закреплен шарнирно, а другим присоединен к весьма жесткому брусу BC (рис. 11.02), нагруженному продольной силой P. Определить критическое значение этой силы.

11.03. Для систем, изображенных на рис. 11.03, определить критическую силу $P_{кр}$ точным и приближенным способами. Размеры элементов считать известными. Изгиб при потере устойчивости происходит в плоскости чертежа.

11.04. Определить критическую силу для стержня с двумя участками различной жесткости (рис. 11.04). Задачу решить энергетическим методом, задаваясь непосредственно уравнением изогнутой оси, и путем подбора поперечной нагрузки, изгибающей стержень подобно форме потери устойчивости. Объяснить полученные результаты, сравнив их с точным решением. Точное решение приведено, например, в учебнике В. И. Феодосьева «Сопротивление материалов» изд. 8-е. М., Наука, 1979.

11.05. Во сколько раз уменьшится критическая сила, сжимающая стержень постоянного поперечного сечения $b_0 \times h$, если сечение сделать переменным, так что $b_1 = \frac{1}{2} b_0$ (рис. 11.05). Сравнить изменение критической силы с изменением массы конструкции.

11.06. Определить длину $l_{кр}$, при которой шарнирно закрепленный по концам стержень (рис. 11.06) теряет устойчивость под действием собственного веса. Дано: $D = 20$ мм; $h = 2$ мм; материал латунь; $E = 10^5$ МПа, удельный вес $\gamma = 87$ кН/м^3.

11.07. Стержень AB одним концом закреплен шарнирно, а другим заделан в упругое основание (рис. 11.07). При потере устойчивости в заделке возникает реактивный момент M_0, пропорциональный углу поворота сечения φ ($M_0 = c\varphi$). Исследовать влияние жесткости заделки c на критическую силу $P_{кр}$ при изменении c от 0 до ∞.

11.08. Рама, симметричная относительно средней вертикальной оси, нагружена двумя силами P (рис. 11.08). Исследовать зависимость критических сил P от отношения изгибных жесткостей горизонтальных и вертикальных стержней. Вычислить $P_{кр}$ при $EI_1 = EI_2$. Силы уве-

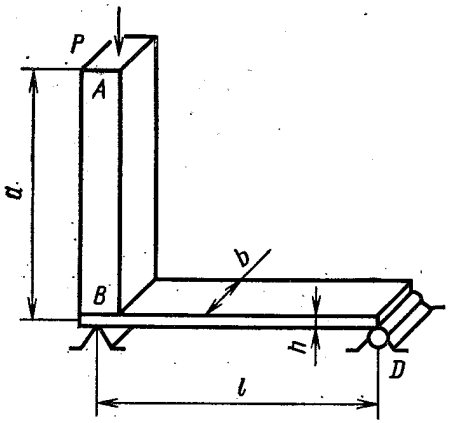


Рис. 11.01

Рис. 11.02

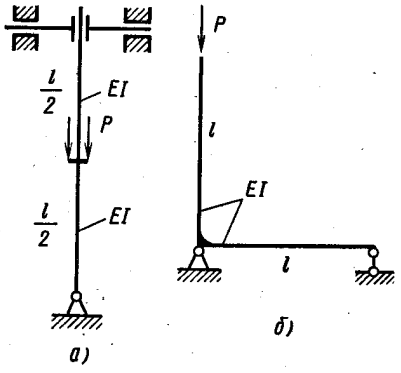


Рис. 11.03

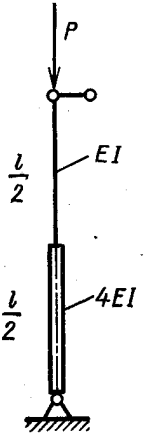


Рис. 11.04

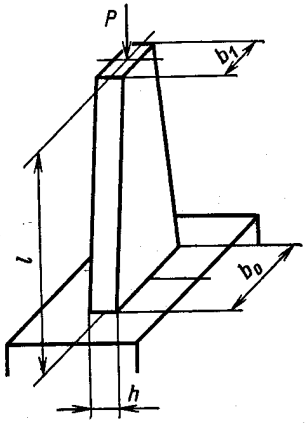


Рис. 11. 05

личиваются одновременно пропорционально некоторому параметру. Изгиб при потере устойчивости происходит в плоскости рамы.

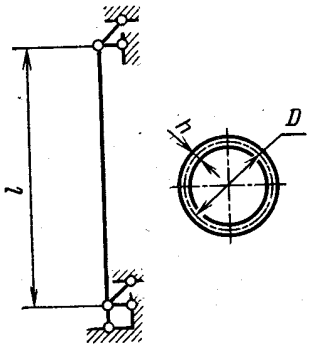


Рис. 11.06

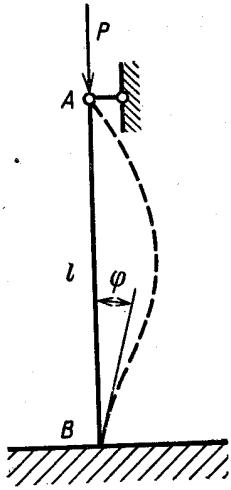


Рис. 11.07

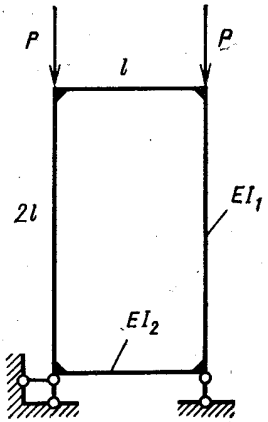


Рис. 11.08

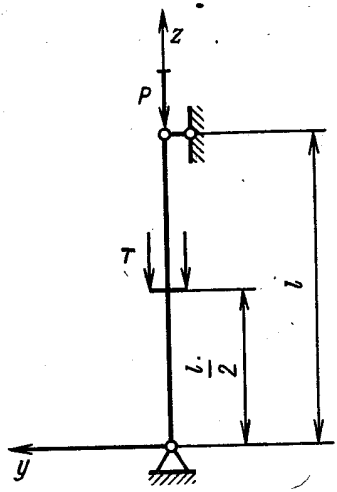


Рис. 11.09

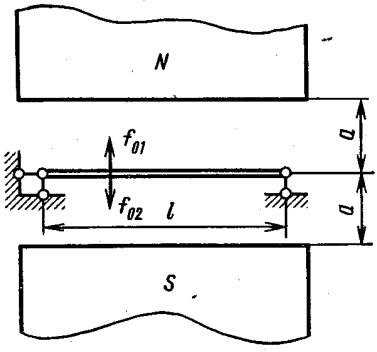


Рис. 11.10

11.09. Шарнирно закрепленный по концам стержень (рис. 11.09) нагружен сжимающими силами P и T. Определить критические нагрузки, если: а) силы P и T увеличиваются одновременно, так что $P = kT$, где k — некоторый постоянный параметр; б) сила P увеличивается, а сила T остается постоянной: $T = \frac{1}{4} T^*_{кр}$,

где $T^*_{кр}$ — критическое значение силы T при $P = 0$; в) сила T увеличивается, а P остается постоянной: $P = \frac{1}{4} P^*_{кр}$, где $P^*_{кр}$ — критическое значение силы P при $T = 0$. Задачу решить энергетическим методом, приняв уравнение изогнутой оси в виде $y = a \sin \frac{\pi z}{l}$.

11.10. Упругий элемент прибора находится между полюсами магнита (рис. 11.10), погонные силы притяжения которых f_{01} и f_{02} зависят от напряженности магнитного поля Φ и расстояния a между элементом стержня и полюсами $\left(f_{01} = f_{02} = \frac{k\Phi^2}{a^2}\right)$.

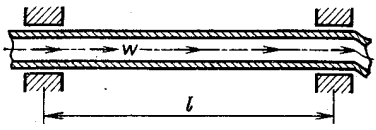


Рис. 11.11

Определить критическую напряженность $\Phi_{кр}$, при которой возможна потеря устойчивости стержня (прогибы изогнутого стержня много меньше размера a).

11.11. По трубке, закрепленной как показано на рис. 11.11, движется жидкость со скоростью w. Определить скорость течения жидкости $w_{кр}$, при которой трубка теряет устойчивость. Дано: трубка стальная; средний диаметр $D_{ср} = 20$ мм; толщина стенки $h = 1$ мм; $l = 2$ м; жидкость — вода.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ ДЛЯ ПРОДОЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

11.12 *. Абсолютно жесткий брус AB, нагруженный продольной сжимающей силой P, опирается на два коротких деформируемых стержня с площадью поперечного сечения F каждый (рис. 11.12, *а*).

Требуется: 1) определить критическую силу $P_{кр}$, при которой возможны соседние отклоненные формы равновесия бруса AB в плоскости zy;

2) определить наименьшее значение силы P_*, при котором ее малое увеличение приводит к возможности возникновения соседних форм равновесия бруса AB.

Задачу решить в двух вариантах:

а) считая, что материал обоих стержней неограниченно следует закону Гука; б) считая, что свойства материала стержней описываются диаграммой сжатия, изображенной на рис. 11.12, *б*, причем потеря устойчивости происходит при напряжениях, бо́льших предела пропорциональности.

11.13. Построить зависимость критического напряжения от гибкости $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ для стальной стойки прямоугольного поперечного сечения при изменении λ от 0 до 200. При $\sigma_{кр} > \sigma_{пц.с}$

* Задача заимствована из книги Пановко Я. Г., Губановой И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М., Наука, 1964.

сравнить результаты, получаемые по формулам Шенли ($\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E'}{\lambda^2}$), Энгессера—Кармана ($\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E_{пр}}{\lambda^2}$) и по приближенной формуле $\sigma_{кр} = \sigma_{т.с} - (\sigma_{т.с} - \sigma_{пц.с})\frac{\lambda^2}{\lambda_*^2}$, где λ_* — гибкость, при которой $\sigma_{кр} = \sigma_{пц.с}$.

Характеристика материала при сжатии показана на рис. 11.13. На участке AB она может быть аппроксимирована зависимостью $\sigma = (-100 + 4 \cdot 10^5 \varepsilon - 10^8 \varepsilon^2)$.

11.14. Построить зависимость критического напряжения от гибкости $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ для стойки прямоугольного поперечного сечения, выполненной из дюраля, при изменении λ от 0 до 200. При $\sigma_{кр} > \sigma_{пц.с}$ сравнить результаты, получаемые по формулам Шенли ($\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E'}{\lambda^2}$), Энгессера — Кармана ($\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E_{пр}}{\lambda^2}$) и по приближенной формуле $\sigma_{кр} = \sigma_{в.с} - (\sigma_{в.с} - \sigma_{пц.с})\frac{\lambda^2}{\lambda_*^2}$, где λ_* — значение гибкости, при которой $\sigma_{кр} = \sigma_{пц.с}$.

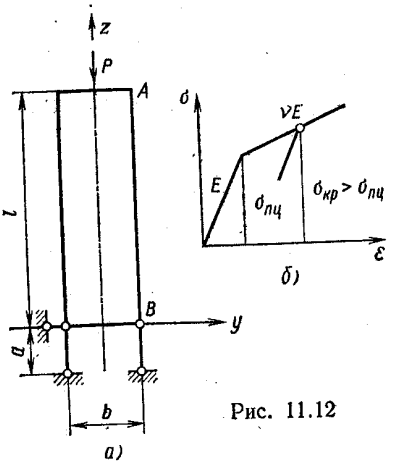


Рис. 11.12

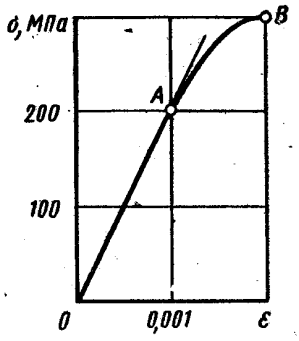


Рис. 11.13

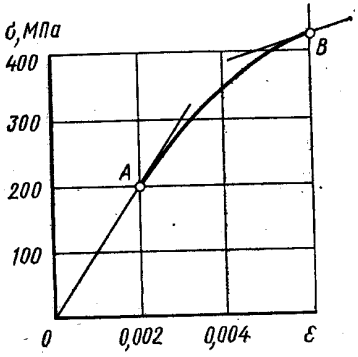


Рис. 11.14

Характеристика материала при сжатии показана на рис. 11.14. На участке AB она может быть аппроксимирована зависимостью $\sigma_{кр} = (-40 + 1{,}4 \cdot 10^5 \varepsilon - 10^7 \varepsilon^2)$.

§ 3. РАСЧЕТ ПРОДОЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

11.15. Ходовой винт AB станка воспринимает усилие подачи, передающееся от резца через перемещающуюся вдоль винта гайку C (рис. 11.15). Определить коэффициент запаса по устойчивости n, считая, что гайка находится в крайнем правом положении на расстоянии $a = 0{,}4$ м от опоры и передает на винт сжимающую силу $P = 8$ кН. Длина винта $l = 1{,}6$ м, внутренний диаметр резьбы $d = 24$ мм, материал сталь 40Х, предел пропорциональности при сжатии $\sigma_{пц.\,с} = 280$ МПа.

Рассмотреть два случая: *а)* $l_1/d < 1{,}5$ (короткая гайка) и *б)* $l_1/d > 3$ (длинная гайка). Концы винта считать закрепленными шарнирно.

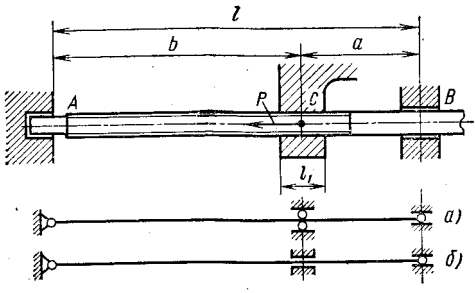


Рис. 11.15

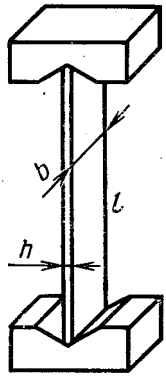


Рис. 11.16

11.16. Определить зависимость между размерами поперечного сечения и длиной стальной пружины (рис. 11.16), которая должна терять устойчивость при повышении температуры на $t = 40°$ С. Предел пропорциональности материала пружины при сжатии $\sigma_{пц.\,с} = 800$ МПа. Коэффициент приведения длины μ принять равным единице.

11.17. Плоская рама, выполненная из стальных стержней прямоугольного сечения ($b = 5h$), нагружена силой P (рис. 11.17). Определить размеры поперечного сечения, при которых коэффициент запаса по устойчивости $n = 3$. Дано: $P = 2{,}6$ кН; $\sigma_{пц.\,с} = 200$ МПа; $l = 100$ мм.

11.18. Защемленный одним концом стальной стержень прямоугольного поперечного сечения (рис. 11.18) опирается на цилиндрическую винтовую пружину, жесткость которой c зависит от числа рабочих витков i. Определить, при каком числе витков i конструкция равноустойчива в плоскостях zx и zy. Дано: $l = 250$ мм; $b = 10$ мм; $h = 5$ мм; параметры пружины: диаметр $D = 10$ мм; диаметр проволоки $d = 2$ мм; материал сталь; $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа.

11.19. Стальная колонна, находящаяся в условиях продольного сжатия, выполнена из неравнобоких уголков 100×65×7 по СТ СЭВ 255—76. Определить расстояние между уголками a (рис. 11.19), при котором жесткость колонны в плоскостях zx и zy одинакова.

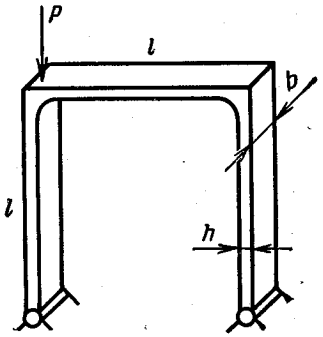


Рис. 11.17

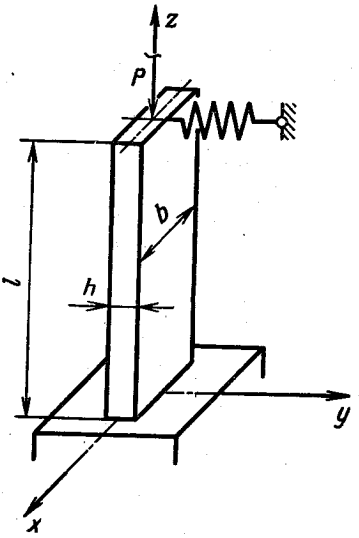


Рис. 11.18

11.20. Подобрать соотношение между основанием b и высотой h прямоугольного поперечного сечения стойки (рис. 11.20 так, чтобы гибкость ее в двух главных плоскостях была одинаковой.

11.21. Рычаг прямоугольного поперечного сечения со сторонами h и b сжимается силами P (рис. 11.21). При изгибе в плоскости zy

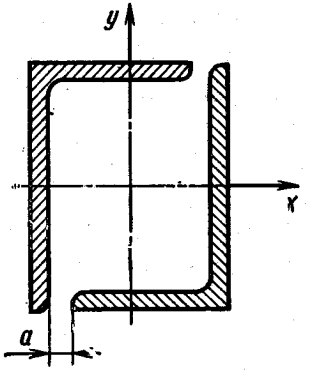


Рис. 11.19

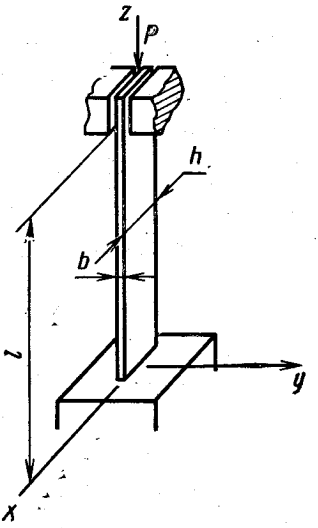


Рис. 11.20

края рычага можно считать шарнирно опертыми, при изгибе в плоскости zx — защемленными. Выбрать оптимальное отношение $h : b$, если а) потеря устойчивости происходит при упругих деформациях ($\sigma_{кр} \leqslant \sigma_{пц.\,с}$); б) потеря устойчивости происходит за пределами пропорциональности ($\sigma_{кр} > \sigma_{пц.\,с}$).

Примечание. Критическое напряжение за пределами пропорциональности рекомендуется определять по формулам:

для пластичных материалов $\sigma_{кр} = \sigma_{т.\,с} - (\sigma_{т.\,с} - \sigma_{пц.\,с}) \dfrac{\lambda^2}{\lambda_*^2}$;

для хрупких материалов $\sigma_{кр} = \sigma_{в.\,с} - (\sigma_{в.\,с} - \sigma_{пц.\,с}) \dfrac{\lambda^2}{\lambda_*^2}$,

где λ_* — гибкость, при которой $\sigma_{кр} = \sigma_{пц.\,с}$.

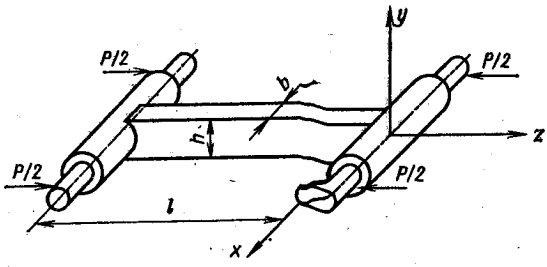


Рис. 11.21

11.22. Определить допускаемую нагрузку $P_{доп}$, сжимающую чугунную литую стойку (рис. 11.22). Подсчитать коэффициент запаса по устойчивости n, соответствующий этой нагрузке. Нижний конец стойки можно считать защемленным, верхний — шарнирно опертым. Дано: $l = 3$ м; $D_{ср} = 150$ мм; $h = 14$ мм; $\sigma_{в.\,с} = 500$ МПа; $\sigma_{пц.\,с} = 200$ МПа; $[\sigma]_с = 180$ МПа. Критическое напряжение за пределами пропорциональности определять по одной из формул, приведенных в задаче 11.21.

11.23. Четырехколонная машина для испытания материалов на растяжение (рис. 11.23) рассчитана на нагрузку $T = 250$ кН. Длина колонны $l = 2{,}5$ м. Определить диаметр D колонны, если она выполнена из стали 45Х, $\sigma_{пц.\,с} = 300$ МПа. Коэффициент запаса по устойчивости $n = 5$.

11.24. Колонна, нагруженная силой $P = 250$ кН, составлена из четырех уголков 50×50×5 (СТ СЭВ 104—74), соединенных между собой планками на расстоянии l друг от друга (рис. 11.24). Габаритные размеры сечения колонны 150×150 мм, высота $L = 5$ м. Внизу колонна неподвижно прикреплена к жесткому фундаменту, наверху — к несущим конструкциям.

Из условия равной гибкости колонны в целом и отдельного уголка между планками определить размер l. Вычислить коэффициент запаса по устойчивости n, если материал уголков сталь 30,

$\sigma_{т.с} = 260$ МПа, $\sigma_{пц.с} = 200$ МПа. Формула для определения $\sigma_{кр}$ за пределами пропорциональности приведена в задаче 11.21.

Коэффициент приведения длины принять: для колонны в целом $\mu \approx 0{,}7$; для уголка между планками $\mu \approx 1{,}0$.

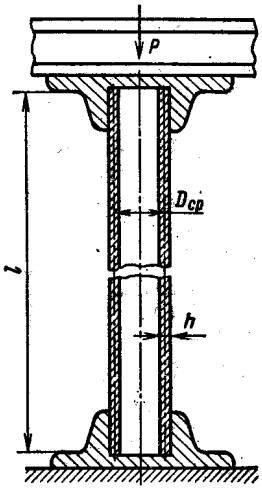


Рис. 11.22

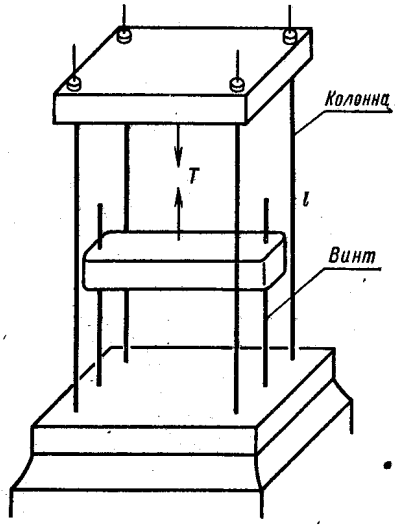


Рис. 11.23

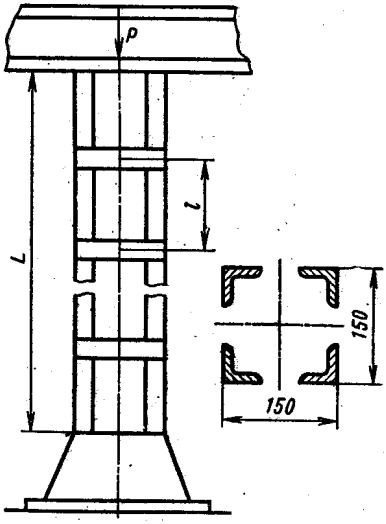


Рис. 11.24

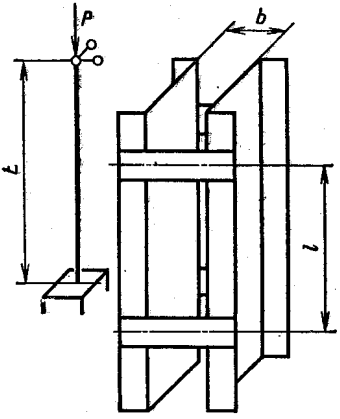


Рис. 11.25

11.25. Колонна, состоящая из двух швеллеров № 20 (ГОСТ 8240—72), нагружена сжимающей силой P (рис. 11.25). Высота колонны $L = 6$ м. Швеллеры соединены между собой планками на расстоянии l друг от друга.

Требуется: 1) выбрать оптимальное расстояние b между швеллерами; 2) определить размер l из условия равной гибкости колонны в целом и отдельного профиля между планками; 3) вычислить допускаемую нагрузку $P_{доп}$, если допускаемое напряжение сжатия $[\sigma]_c = 150$ МПа.

Коэффициенты приведения длины μ принять такими же, как в задаче 11.24.

§ 4. ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

11.26. Для консольной балки (рис. 11.26) определить зависимость наибольшего прогиба f от продольной силы S и поперечного момента M. Исследовать полученную зависимость при $S \to 0$.

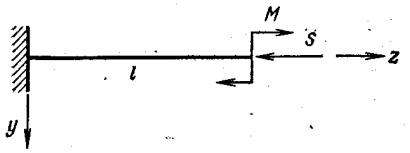


Рис. 11.26

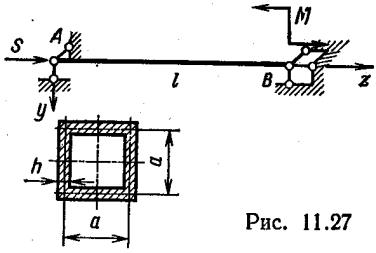


Рис. 11.27

Определить значение продольной силы $S_{кр}$, при которой прогиб в плоскости zy стремится к бесконечности (считать, что потеря устойчивости в плоскости zx невозможна).

11.27. Коробчатая балка AB, шарнирно закрепленная по концам, нагружена продольной силой S и изгибающим моментом M (рис. 11.27). Требуется построить эпюры поперечных сил и внутренних изгибающих моментов, вычислить наибольшее напряжение. Задачу решить точным способом

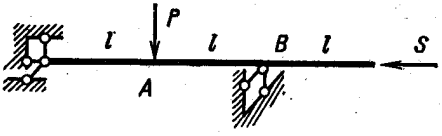


Рис. 11.28

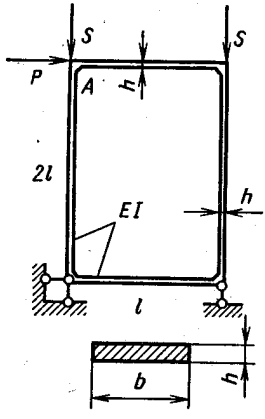


Рис. 11.29

и приближенным. Дано: $l = 4$ м; $a = 60$ мм; $h = 3$ мм; $S = 30$ кН; $M = 1{,}5$ кН·м; материал балки сталь; $\sigma_т = 350$ МПа; $\sigma_{пц} = 300$ МПа.

11.28. Тонкостенная стальная трубка диаметром $D_{ср}$ с толщиной стенки h расположена на двух опорах и нагружена так,

как показано на рис. 11.28. Определить изгибающие моменты в сечениях A и B. Задачу решить приближенно, коэффициент приведения длины стержня μ принять равным 1,155. Дано: $D_{ср} = 20$ мм; $h = 1$ мм; $l = 350$ мм; $P = 150$ Н; $S = 2$ кН; $\sigma_т = 400$ МПа; $\sigma_{пц} = 350$ МПа.

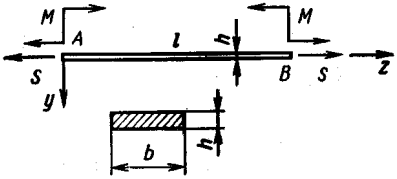


Рис. 11.30

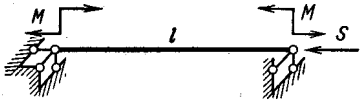


Рис. 11.31

11.29. Для рамы, изображенной на рис. 11.29, показать форму изогнутой оси и определить линейное δ и угловое θ перемещения узла A: а) при $S = 0$, $P = 150$ Н; б) при $S = 4$ кН, $P = 150$ Н. Задачу решить приближенно, воспользовавшись критической силой для данной конструкции, определенной в решении задачи 11.08. Дано: $b = 20$ мм; $h = 5$ мм; $l = 100$ мм.

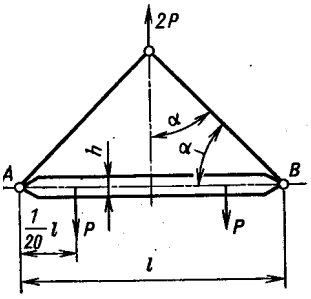


Рис. 11.32

11.30. Гибкий стальной стержень AB, находящийся в условиях чистого изгиба, нагружается продольной растягивающей силой S

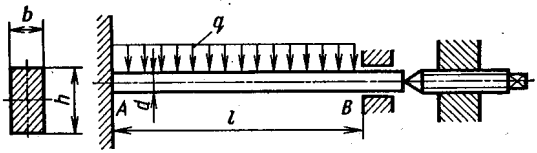


Рис. 11.33

(рис. 11.30). При каком значении S_* наибольший прогиб стержня уменьшится в два раза? Дано: $l = 300$ мм; $b = 20$ мм; $h = 5$ мм; $M = 10$ Н·м, материал пружинная сталь, $\sigma_т = 500$ МПа, $\sigma_{пц} = 420$ МПа.

11.31. Трубчатый элемент конструкции закреплен по концам шарнирно и нагружен, как показано на рис. 11.31. В рабочих условиях $M = 2$ кН·м, $S = 100$ кН. Размеры трубы $D_{ср} = 100$ мм; $h = 5$ мм; $l = 3$ м; материал сталь; $\sigma_т = 300$ МПа; $\sigma_{пц} = 280$ МПа. Определить коэффициент запаса по текучести $n_т$, если: а) при форсированном режиме работы конструкции обе нагрузки (M и S) увеличиваются одновременно пропорционально одному параметру; б) при форсированном режиме сила S остается постоянной, момент увеличивается; в) момент не меняется, сила S может увеличиваться.

11.32. Определить коэффициент запаса по устойчивости n и по текучести $n_т$ балки AB (рис. 11.32). Дано: $l = 2$ м; $b = 40$ мм; $h = 60$ мм; $P = 40$ кН; $\sigma_т = 300$ МПа; $\sigma_{пц} = 250$ МПа. Задачу решить приближенным методом.

11.33. Стержень AB круглого поперечного сечения (рис. 11.33), нагруженный равномерно распределенными силами интенсивностью q, подвергается воздействию продольного усилия S. Определить коэффициент запаса по текучести $n_т$, если известно, что поперечная нагрузка остается постоянной, а продольная сила может увеличиваться. Дано: $d = 10$ мм; $l = 750$ мм; $q = 300$ Н/м; $S = 2$ кН; материал легированная сталь; $\sigma_т = 460$ МПа; $\sigma_{пц} = 400$ МПа. Задачу решить приближенным способом.

ГЛАВА 12

ВЫНОСЛИВОСТЬ И УДАР

§ 1. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ НАПРЯЖЕНИЯХ, ПЕРЕМЕННЫХ ВО ВРЕМЕНИ

12.01. Построить кривую усталости в координатах σ_{max}, $\lg N$ по данным испытаний при симметричных циклах 50 образцов низколегированной стали на пяти уровнях напряжений. Определить предел выносливости σ_{-1} и показатель степени k в уравнении $\sigma_{max}^{k} N_{ср} = \text{const}$.

Результаты испытаний

σ, МПа	290	280	270	264	260
$N \cdot 10^{-5}$	4—6	8—12	16—25	25—35	39—41
$N_{ср} \cdot 10^{-5}$	5,02	9,78	19,5	29,9	40,0

В таблице указаны интервалы числа циклов N, при которых происходило разрушение образцов на данном уровне напряжений, и среднее число циклов $N_{ср}$. Испытания проводились при соблюдении подобия циклов. При напряжении 264 МПа два образца из 10 не разрушились за 10^7 циклов, при $\sigma = 260$ МПа не разрушилось восемь образцов.

12.02. Построить диаграмму предельных амплитуд в координатах σ_a, σ_m по результатам испытаний четырех серий одинаковых образцов стали. Испытания проводились при постоянных (в пределах серии) средних напряжениях; полученные при этом кривые усталости в полулогарифмических координатах σ_a, $\lg N$ показаны на рис. 12.01. Предел прочности материала $\sigma_в = 800$ МПа. Для каждого цикла вычислить коэффициент асимметрии r и предел выносливости σ_r.

12.03 *. Ступенчатый вал (рис. 12.02), нагруженный моментами $M = 640$ Н·м, вращается с постоянной угловой скоростью. Размеры вала: $D = 50$ мм; $d = 40$ мм; $r = 2$ мм; материал легированная сталь; $\sigma_{в.р} = 750$ МПа; $\sigma_{т.р} = 420$ МПа; $\sigma_{-1} = 325$ МПа. Поверхность вала шлифованная. Определить коэффициент запаса по текучести $n_т$ и по разрушению n_r.

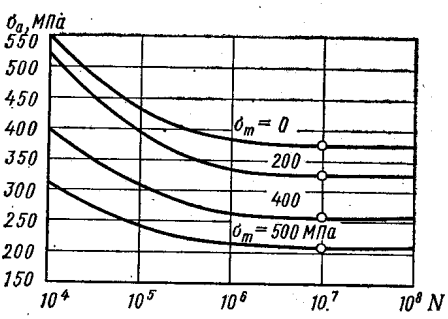


Рис. 12.01

12.04. Вал, выполненный из углеродистой стали, скручивается моментами M, меняющимися от нуля до

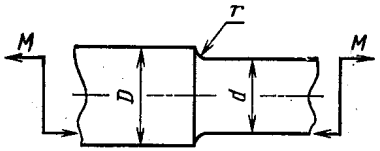


Рис. 12.02

850 Н·м. Определить коэффициент запаса по текучести $n_т$ и по разрушению n_r. Размеры вала: $D = 50$ мм, $d = 45$ мм, $r = 2{,}5$ мм (рис. 12.03); механические характеристики материала $\sigma_{в.р} = 500$ МПа; $\sigma_{т.р} = 300$ МПа; $\sigma_{т.с} = 400$ МПа; $\tau_{-1} = 130$ МПа. Поверхность вала шлифованная.

12.05. Вращающийся вал с проточкой (рис. 12.04), находится под действием моментов M_x и $M_к$. Изгибающий момент постоя-

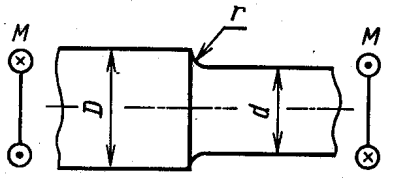


Рис. 12.03

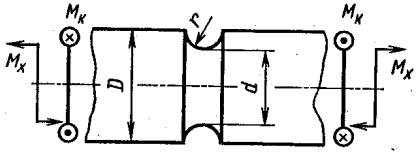


Рис. 12.04

нен, а крутящий — меняется от нуля до $M_к$. Определить коэффициент запаса по текучести $n_т$ и по разрушению n_r. Дано: $M_x = 50$ Н·м; $M_к = 60$ Н·м; $D = 30$ мм; $d = 20$ мм; $r = 5$ мм; материал легированная сталь; $\sigma_{в.р} = 700$ МПа; $\sigma_{т.р} = 450$ МПа; $\sigma_{т.с} = 550$ МПа; $\sigma_{-1} = 400$ МПа; $\tau_{-1} = 160$ МПа. Поверхность вала обдута дробью.

12.06. Вал с напрессованной втулкой (рис. 12.05) нагружен постоянными поперечной P и продольной S силами. Определить

* При решении этой и следующих задач использован справочный материал, приведенный в учебнике В. И. Феодосьева «Сопротивление материалов», М., Наука, 1979; в дальнейшем обозначается [1], и в книге С. В. Серенсена, В. П. Когаева, Р. М. Шнейдеровича «Несущая способность и расчет деталей машин на прочность», М., Машиностроение, 1975 — обозначается [2].

коэффициент запаса по текучести $n_т$ и по разрушению n_r при вращении вала вокруг своей оси с постоянной скоростью. Расчетная схема вала показана на рисунке. Дано: $d = 30$ мм; $L = 1$ м; $P = 900$ Н; $S = 20$ кН; материал легированная сталь; $\sigma_{в.р} = 500$ МПа; $\sigma_{т.р} = 400$ МПа; $\sigma_{т.с} = 500$ МПа; $\sigma_{-1} = 280$ МПа. Давление напрессовки втулки $p_0 = 35$ МПа, обработка поверхности вала — тонкая обточка.

12.07. При выводе формулы для определения коэффициента запаса по усталостной прочности обычно предполагается, что при интенсификации режима работы детали (форсированный режим) циклы напряжений остаются подобными. Поэтому предельное состояние на диаграмме предельных амплитуд определяется продолжением луча OA до пересечения с предельной

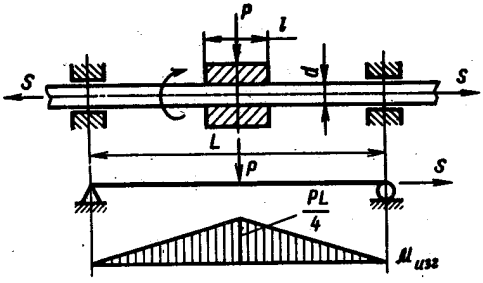


Рис. 12.05

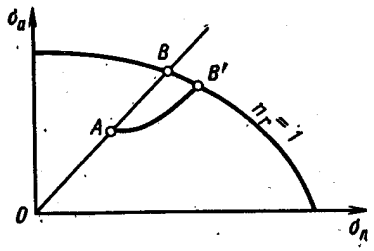


Рис. 12.06

линией (точка B на рис. 12.06). Коэффициент запаса по усталостному разрушению $n_r = \sigma_r/\sigma_{max}$ определяется в этом случае как отношение OB/OA.

Однако возможны такие условия нагружения, когда при форсированном режиме тип цикла иной, чем при рабочем режиме. В этих случаях положение предельной точки B' (рис. 12.06) следует определять иначе. Для приведенных ниже примеров требуется на диаграмме предельных амплитуд показать точку, изображающую форсированный режим, и выяснить, отношение каких отрезков определяет коэффициент запаса n_r.

1. Вал A, несущий на себе тяжелый маховик B (рис. 12.07, *а*), соединен с валом C посредством пружины E, отогнутые края которой фиксированы в соответствующих отверстиях валов A и C. Угловая скорость маховика в период пуска установки нарастает согласно зависимости $\omega = \omega_0 \sin^2 \frac{\pi t}{2T}$, где T — время разгона. В процессе эксплуатации возможны многократные пуски с периодом разгона T, меньшим расчетного. Оценить прочность пружины.

2. На двухопорной балке (рис. 12.07, *б*) закреплен тяжелый электродвигатель постоянного тока весом P_1. Ротор двигателя имеет небольшой эксцентриситет e, что приводит к возникновению

динамической нагрузки на балку $P_2 = \pm \frac{Q}{g} \omega^2 e$, где Q — вес ротора; ω — его угловая скорость. Жесткость балки в плоскости zx весьма велика. Оценить прочность балки, если в процессе эксплуатации возможно повышение частоты вращения двигателя.

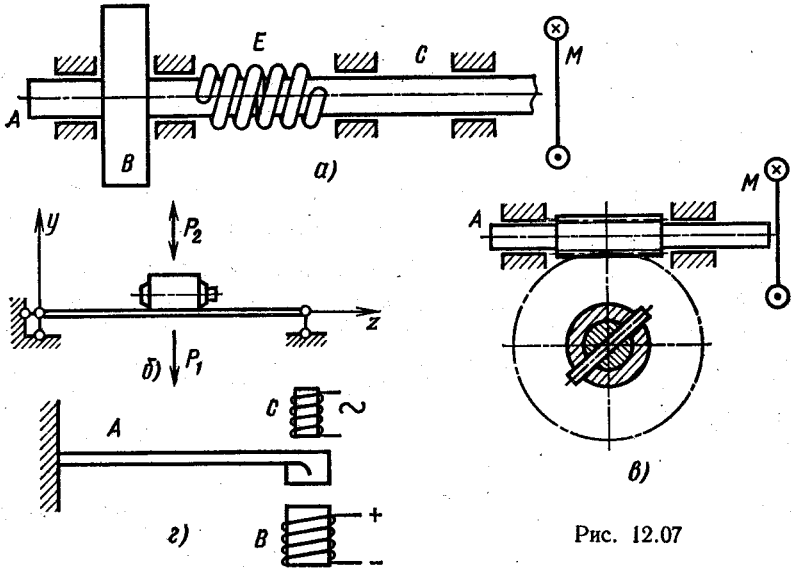


Рис. 12.07

3. Вал A червячной передачи (рис. 12.07, *в*) соединен с электродвигателем и с приводом к транспортеру. Крутящий момент от червячного колеса к его валу передается при помощи шпильки, которая срезается, если передаваемый момент достигает определенного значения M_*. Вал червяка находится в условиях изгиба и кручения. При рабочем режиме крутящий момент постоянен во времени, при форсированном — увеличивается. Оценить прочность вала червяка.

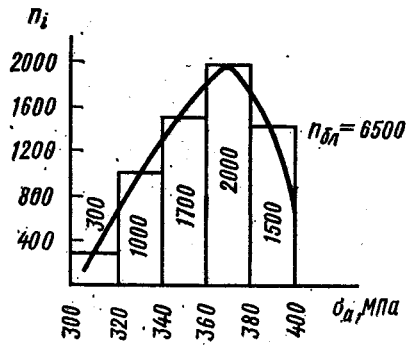


Рис. 12.08

4. Пружина A (рис. 12.07, *г*) находится под действием постоянной силы притяжения магнита B и изменяющейся во времени по симметричному циклу силы притяжения магнита C, что приводит к вынужденным колебаниям пружины с некоторой постоянной амплитудой. Частота переменного тока постоянна. Форсированный режим

характеризуется увеличением только силы притяжения магнита B. Оценить прочность пружины.

12.08. Пружина, работающая в условиях симметричного изменения прогибов при нестационарном режиме, испытана в рабочих условиях. Результаты испытаний приведены на рис. 12.08. Определить ресурс пружины λ, выраженный числом блоков нагружения до появления усталостного разрушения, если предел выносливости пружины, определенный на базе $N_0 = 10^7$ циклов; $\sigma_{-1} = 300$ МПа; предел текучести $\sigma_т = 400$ МПа; число циклов в блоке $n_{ол} = 6500$. В уравнении кривой выносливости $\sigma^k_{max} N = \text{const}$ показатель степени $k = 13$.

§ 2. ОЦЕНКА НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ УДАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

12.09. Груз весом P, двигаясь по наклонной плоскости AB с постоянной скоростью v_0, встречает на своем пути неподвижный груз весом T, покоящийся на пружине (рис. 12.09). Определить зависимость наибольшего перемещения λ_{max}, возникающего в пружине при ударе, от угла наклона плоскости AB. Массой пружины и трением при движении по плоскости AB пренебречь, удар считать неупругим.

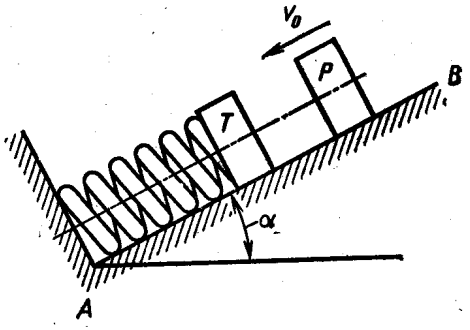


Рис. 12.09

12.10. Груз весом T висит на пружине, имеющей жесткость c (рис. 12.10). Составить уравнение энергетического баланса для оценки напряжений, возникающих в пружине, при ударе по системе грузом P, двигающимся со скоростью v. Записать закон движения грузов в процессе удара. Ограничиться рассмотрением движения грузов вверх, считая удар неупругим.

12.11. Две детали массой m_1 и m_2, соединенные между собой упругим тросом длиной l, подвергаются ударному воздействию массы m_0, двигающейся с постоянной скоростью v_0 (рис. 12.11). Определить наибольшее удлинение троса Δl_{max}, считая удар неупругим. Рассмотреть частные случаи, когда $m_0 = m_1 = m_2 = m$ и когда $m_2 = \infty$. Массой троса пренебречь, силы трения не учитывать.

12.12. Тяжелый чугунный маховик вращается вместе со стальным валом с постоянной угловой скоростью ω (рис. 12.12). Определить наибольшее напряжение, возникающее в вале при его мгновенной остановке: а) в левом подшипнике; б) в правом подшипнике, в) в обоих подшипниках одновременно. Дано: $D =$

$= 200$ мм; $B = 25$ мм; плотность чугуна $\rho = 7{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3; $a = 0{,}5$ м; $b = 1$ м; $d = 20$ мм; $\omega = 20$ с$^{-1}$.

12.13. На стальную раму (рис. 12.13) с высоты s падает груз весом P. Поперечное сечение стержней — тонкостенная коробка. Определить коэффициент запаса по текучести $n_т$ рамы, если $P = 500$ Н; $s = 10$ мм; $l = 0{,}5$ м; $B = 10h$; $H = 20h$; $h = 4$ мм; $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 250$ МПа. Массой рамы пренебречь. Расчет выполнить по теории начала текучести наибольших касательных напряжений.

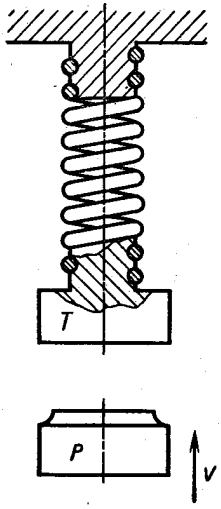


Рис. 12.10

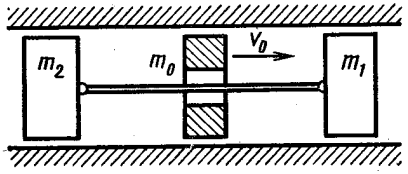


Рис. 12.11

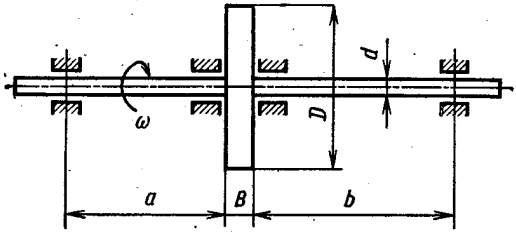


Рис. 12.12

12.14. Сравнить прочность стальных рессор, изображенных на рис. 12.14, выполненных из одинакового материала и имеющих одинаковые размеры. Дано: $P = 10$ Н; $H = 0{,}2$ м; $l = 0{,}2$ м; $b = 20$ мм; $h = 5$ мм. Материал рессор кремнистая сталь, $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 800$ МПа. Вычислить коэффициент запаса по текучести $n_т$. Массой рессор пренебречь.

12.15. Шарнирно закрепленная по концам балка (рис. 12.15, *а*) несет на себе груз массой m_1. Определить наибольшее смещение δ_{max} груза вследствие деформации системы и коэффициент запаса по текучести $n_т$ балки при ударе по ней груза массой m_2, двигающегося со скоростью v. Как изменятся эти величины, если между грузом и балкой поместить пружину (рис. 12.15, *б*), податливость которой в 4 раза больше податливости балки?

Дано: $m_1 = m_2 = 10$ кг; $v = 0{,}4$ м/с; $l = 0{,}4$ м; $b = 20$ мм; $h = 5$ мм; материал балки рессорная сталь; $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = 500$ МПа. Массой балки пренебречь, удар считать неупругим.

12.16. Прямолинейная в недеформированном состоянии стальная пружина AB одним концом закреплена жестко, а другим

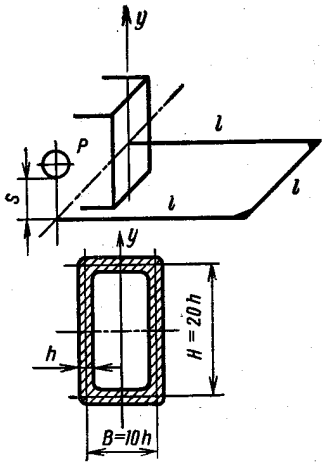


Рис. 12.13

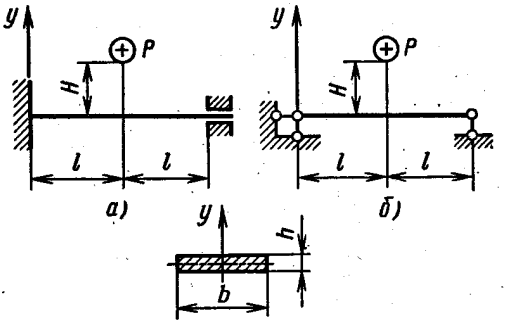


Рис. 12.14

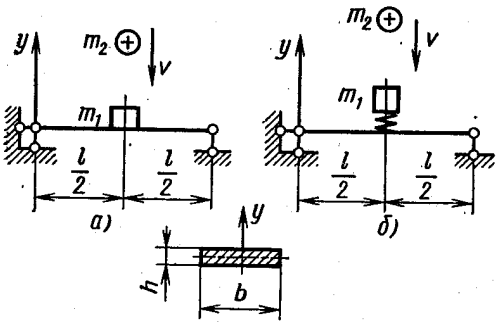


Рис. 12.15

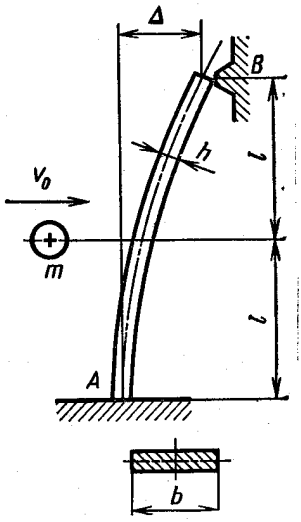


Рис. 12.16

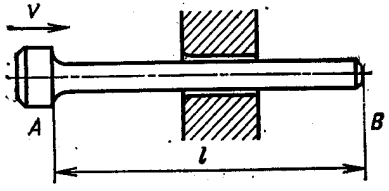


Рис. 12.17

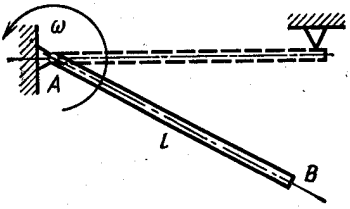


Рис. 12.18

оперта на неподвижную опору так, что прогиб этого торца равен Δ (рис. 12.16). Определить, с какой скоростью v_0 должен двигаться груз массой m, чтобы при ударе его по пружине контакт в опоре B был нарушен. Дано: $l = 0{,}2$ м; $b = 10$ мм; $h = 2$ мм; $\Delta = 20$ мм; $m = 1$ кг. Массой пружины пренебречь.

12.17. Стержень AB движется равномерно со скоростью v и останавливается вследствие удара об абсолютно жесткую опору (рис. 12.17). Определить наибольшее изменение длины Δl стержня в момент остановки, если $l = 0{,}2$ м; $v = 10$ м/с; материал закаленная сталь, плотность $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

12.18. Стержень AB вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через точку A (рис. 12.18). Определить наибольший изгибающий момент и напряжения, возникающие в стержне при внезапной остановке сечения B. Дано: $\omega = 10$ с$^{-1}$; $l = 0{,}2$ м; поперечное сечение — квадрат со стороной $a = 10$ мм; материал сталь. Принять плотность $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

ГЛАВА 13

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

13.01. Плоский кривой брус нагружен силами P как показано на рис. 13.01. Построить эпюры напряжений, возникающих в наиболее нагруженном сечении. Сравнить полученные значения с результатом расчета по формулам теории изгиба прямого бруса. Дано: $l = 100$ мм; $\rho_0 = 60$ мм: $B = 30$ мм; $H = 60$ мм; $P = 10$ кН.

13.02. Кольцо, изображенное на рис. 13.02, нагружено по внутренней поверхности равномерно распределенным давлением p. Сравнить напряженное состояние кольца, определяемое точным решением (задача Ламе), с результатами, полученными по приближенной теории расчета колец. Дано: $r_1 = 30$ мм; $r_2 = 60$ мм; $h = 30$ мм; $p = 100$ МПа.

Указание. С теорией изгиба колец можно познакомиться, например, по книге С. В. Бояршинова «Основы строительной механики машин», М., Машиностроение, 1973, стр. 113—119.

13.03. Кольцо (рис. 13.03) по наружной поверхности нагружено равномерно распределенными моментами интенсивностью m. Определить наибольшие напряжения, возникающие в кольце, и сравнить их со значениями, получаемыми по теории изгиба прямого бруса. Дано: $r_1 = 30$ мм; $r_2 = 60$ мм; $b = 30$ мм; $m = 10$ кН·м/м.

13.04. Определить наибольшие напряжения растяжения и сжатия, возникающие в кольце, изображенном на рис. 13.04, нагруженном осесимметричными силами P и внутренним давлением p. Дано: $r_{11} = 20$ мм; $r_{12} = r_{21} = 45$ мм; $r_{22} = 100$ мм; $h_1 = 100$ мм; $h_2 = 30$ мм; $R_1 = 40$ мм; $R_2 = 80$ мм; $P = 300$ кН; $p = 20$ МПа. О расчетных зависимостях см. указание к задаче 13.02.

13.05. Сравнить напряженно-деформированное состояние стальных тонкостенных трубок, изображенных на рис. 13.05: $а$ — один конец трубки заделан; $б$ — оба конца свободны. Как изменятся напряжения и деформации, если прорезь заварить по

всей длине? Дано: $M = 10$ Н·м; $l = 0{,}4$ м; средний диаметр $D_{ср} = 40$ мм; толщина стенки $h = 2$ мм; $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с}$.

13.06. Сравнить наибольшие напряжения и перемещения, возникающие в стальной «корытной» балочке (рис. 13.06) при нагружении ее силой P, проходящей через центр изгиба ($а$) и через центр тяжести поперечного сечения ($б$). Дано: $B = 20$ мм; $H = 40$ мм; $h = 2$ мм; $l = 0{,}4$ м; $P = 0{,}5$ кН.

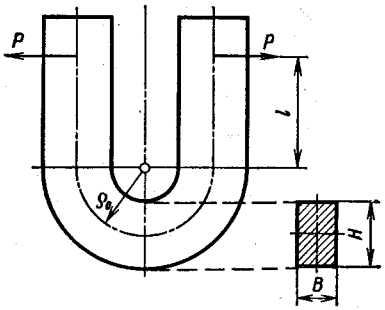


Рис. 13.01

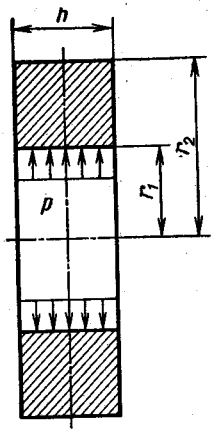


Рис. 13.02

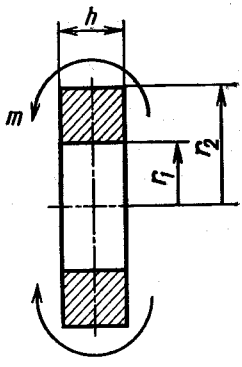


Рис. 13.03

13.07. Двутавровый брус (рис. 13.07) подвергается воздействию пары сил, приложенных в плоскости zy ($а$); в плоскости, параллельной zy и отстоящей от нее на расстояние $\frac{1}{2}B$ ($б$). Сравнить напряжения, возникающие в брусе в обоих случаях нагружения. Дано: $B = 20$ мм; $H = 40$ мм; $h = 2$ мм; $l = 0{,}4$ м; $P = 1$ кН.

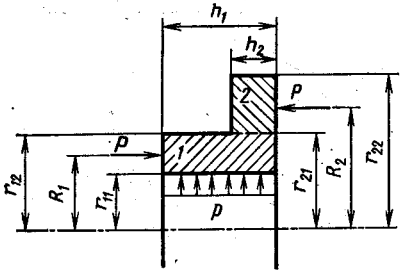


Рис. 13.04

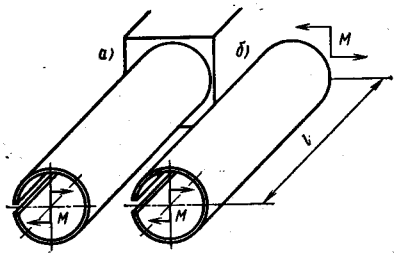


Рис. 13.05

13.08. Длинная стальная линейка, привулканизованная к резиновому основанию, нагружена парой сил моментом M (рис. 13.08). Определить наибольший прогиб линейки y_{max} и наибольшие напряжения в ней. Построить эпюры прогибов и внутренних изгибающих моментов, возникающих в сечениях линейки.

Дано: $b = 8$ мм; $h = 2$ мм; $M = 5$ Н·м; коэффициент «постели» резины $\chi =$. МПа.

13.09. Стальная пружина, закрепленная как показано на рис. 13.09, опирается на упругую резиновую подкладку и нагружается силой P. Определить наибольшие напряжения σ_{max}, воз-

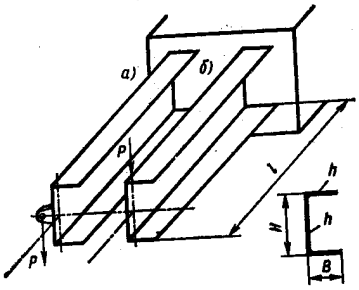


Рис. 13.06

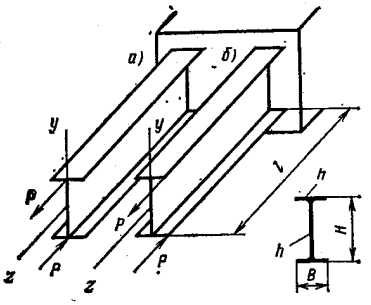


Рис. 13.07

никающие в пружине, и наибольший прогиб y_{max}. Как изменятся эти величины, если резиновую подкладку убрать? Дано: $b =$ $= 10$ мм; $h = 3$ мм; $l = 100$ мм; $P = 0{,}5$ кН; коэффициент «постели» для резиновой подкладки $\chi = 500$ кН/м^2.

13.10. Как деформируется срединная поверхность пластины произвольной формы в плане при действии равномерно распределенных по контуру моментов интенсивностью m (рис. 13.10)?

13.11. Какую форму приобретает срединная поверхность пластины

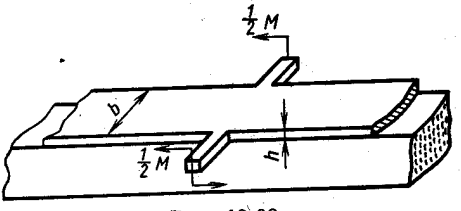


Рис. 13.08

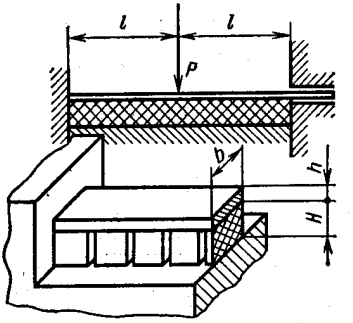


Рис. 13.09

(рис. 13.11), нагруженной давлением p и равномерно распределенными по двум сторонам моментами m_y, равными $m_y =$ $= \mu\left(\frac{pa}{2}x - \frac{px^2}{2}\right)$? Определить наибольший прогиб w_{max} и максимальное эквивалентное напряжение $\sigma_{экв}$ по теории начала текучести Хубера—Мизеса, считая размеры пластины и упругие характеристики материала известными.

13.12. Две тонкостенные трубки диаметром D с толщиной стенки h надеты одна на другую. Между трубками имеется радиальный зазор $\Delta \ll D$. Скрепление трубок осуществляется внутрен-

ним давлением $p_{сб}$. Определить контактное давление $p_к$ после разгрузки. Чему равны деформации и напряжения в трубках при действии рабочего давления p_*? Материал наружной трубки линейно-упругий (закаленная сталь), внутренней — идеальный упруго-пластичный (низкоуглеродистая сталь), предел текучести последнего $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = \sigma_т$ известен. Модуль упругости материала обеих трубок одинаков и равен E. Дано: давление сборки $p_{сб} = 5p_0$, где $p_0 = \sigma_т 2h/D$; зазор $\Delta = \sigma_т D/E$; рабочее давление $p_* = 4{,}5p_0$. Эффектом Баушингера пренебречь. Задачу рекомендуется решить графически.

13.13. Две тонкостенные трубки диаметром D с толщиной стенки h посажены одна на другую с радиальным натягом Δ.

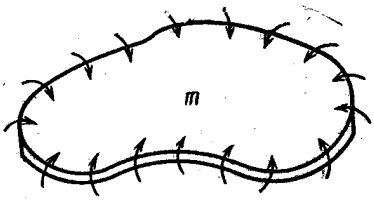


Рис. 13.10

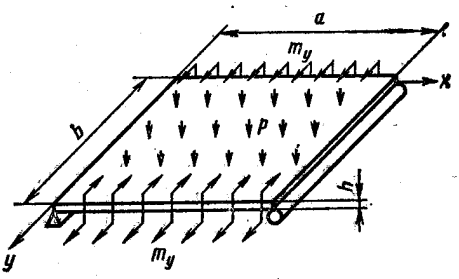


Рис. 13.11

Материал наружной трубки линейно-упругий (закаленная сталь) характеристика материала внутренней трубки (низкоуглеродистая сталь) — диаграмма Прандтля, предел текучести $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = \sigma_т$ известен. Модуль упругости материала обеих трубок одинаков и равен E. Определить изменения диаметров трубок $\Delta D_{1сб}$ и $\Delta D_{2сб}$ и напряжения $\sigma_{1сб}$, $\sigma_{2сб}$, возникающие после посадки, если $\Delta = 3\varepsilon_т D/2$, где $\varepsilon_т = \sigma_т/E$ (индексом 1 обозначены величины, относящиеся к наружной трубке, индексом 2 — к внутренней). Как изменятся эти величины при нагружении трубок внутренним давлением $p_* = 4{,}5p_к$, где $p_к$ — контактное давление после сборки? Определить остаточные изменения диаметров и остаточные напряжения после снятия давления p_*. Эффектом Баушингера пренебречь. Задачу рекомендуется решить графически.

13.14. Неоднородный стержень AB постоянного поперечного сечения закреплен между двумя жесткими опорами и нагружен силой P (рис. 13.12). Зависимости усилий N_1 от удлинения Δl_1 на участке AC и N_2 от Δl_2 на участке CB для различных вариантов материала частей стержня AB даны на том же рисунке: *а* — материал на участке AC нелинейно-упругий, на участке CB — упруго-пластический; *б* — на участке AC материал жестко-пластический, на участке CB — линейно-упругий; *в* — участок AC выполнен из жестко-пластического материала, участок CB — из упруго-пластического. Определить графически характеристику

конструкции (зависимость перемещения w сечения C от нагрузки P) и зависимости усилий N_1 и N_2 от P.

13.15. Конструкция, составленная из трех резиновых стержней одинакового поперечного сечения F_0, показана на рис. 13.13 в недеформированном состоянии. Построить характеристику конструкции $P = f(\delta)$, где δ — перемещение узла A, если зависимость между напряжением $\sigma = N/F_0$ и степенью удлинения $\lambda = l/l_0$ материала стержней задана:

σ, МПа	1,25	2,35	2,80	3,30	4,60	6,50	7,50
λ	1,10	1,30	1,50	2,0	2,50	3,0	3,20

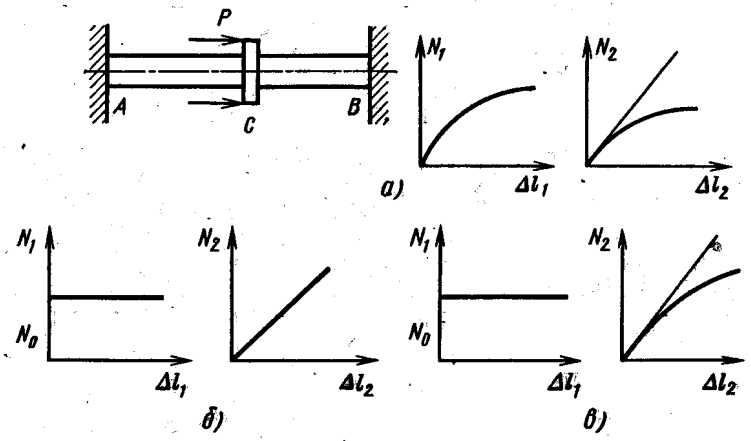


Рис. 13.12

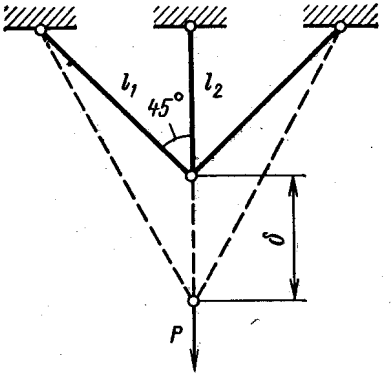


Рис. 13.13

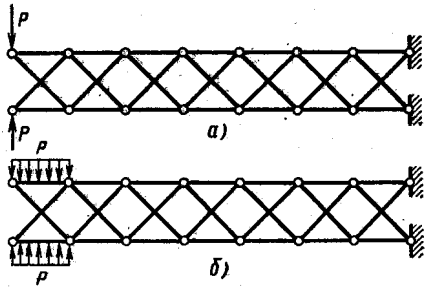


Рис. 13.14

Принять $l_2 = 100$ мм; $F_0 = 100$ мм^2. Характеристику построить до значения δ равного 220 мм.

13.16. Стержневая конструкция (рис. 13.14) нагружена самоуравновешенными сосредоточенными (*а*) и распределенными (*б*) силами. Число пролетов велико. Диагональные стержни не скреплены друг с другом. Каково влияние нагрузки на остальные пролеты?

ГЛАВА 1

1.01. Предельная длина капронового каната 27,4 км, стального 17,4 км.

1.02. $\Delta = -\frac{\mu P}{4Eh}$. Изменение расстояния равно $\Delta = \varepsilon L_{AB}$, где $\varepsilon = -\mu \frac{\sigma}{E}$ — деформация; $L_{AB} \approx a$ — расстояние между точками A и B.

1.03. $\Delta l = 0{,}7 \cdot 10^{-4}$ м; $\gamma = 0{,}104 \cdot 10^{-2}$ рад. Сначала определяем нормальные и касательные напряжения в площадках α и $\alpha + 90°$, затем по закону Гука, используя принцип наложения, находим

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sigma_2}{E}(\cos^2\alpha - \mu \sin^2\alpha); \quad \gamma = \frac{\sigma_2}{E}(1 + \mu)\sin 2\alpha.$$

Искомая величина $\Delta l = \varepsilon_\alpha l$.

1.04. Эпюры нормальных сил и перемещений показаны на рис. 1; *а*) $\sigma_{max} = 100$ МПа; $w_{max} = 0{,}2$ мм; $n_т = 2$; *б*) $\sigma_{max} = 50$ МПа; $w_{max} = 0{,}1$ мм; $n_т = 4$; *в*) $\sigma_{max} = 50$ МПа; наибольшее взаимное смещение торцев $w_{max} = 0{,}1$ мм; $n_т = 4$.

Два варианта эпюры перемещений в случае *в* соответствуют закреплению бруса в различных точках.

1.05. $$\delta = \frac{1}{\sin(\alpha + \beta)}\sqrt{\Delta l_1^2 + \Delta l_2^2 - 2\Delta l_1 \Delta l_2 \cos(\alpha + \beta)};$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\Delta l_2 \cos\alpha - \Delta l_1 \cos\beta}{\Delta l_2 \sin\alpha + \Delta l_1 \sin\beta}.$$

Полное перемещение δ определяется как геометрическая сумма горизонтальной $\delta_г$ и вертикальной $\delta_в$ составляющих. Последние рационально вычислять с помощью системы уравнений, которую можно составить на основе геометрических соотношений, получаемых при проектировании составляющих перемещений $\delta_г$ и $\delta_в$

на направления стержней: $\delta_в \cos\alpha - \delta_г \sin\alpha = \Delta l_1$; $\delta_в \cos\beta + \delta_г \sin\beta = \Delta l_2$ (рис. 2).

1.06. $\alpha = 60°$. Узел A перемещается горизонтально (рис. 3), если $\Delta l_1 = \frac{1}{2}\Delta l_2$. (Здесь и дальше величинам, относящимся

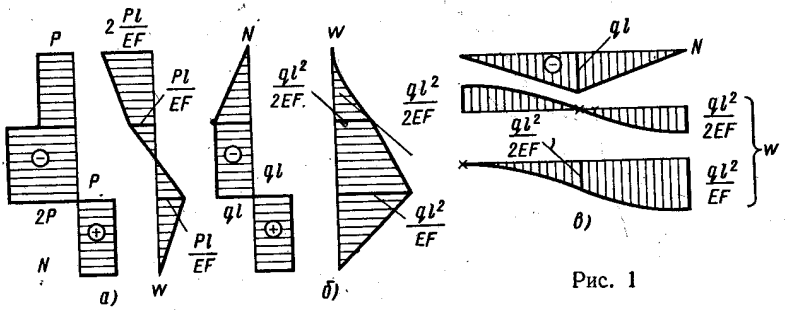


Рис. 1

к стержню AB, приписан индекс 1, к стержню AC — индекс 2). Из условий равновесия части конструкции, изображенной на рисунке, следует $N_1 = P\frac{\cos\alpha}{\cos 30°}$; $N_2 = P\sin\alpha - N_1\cos 60°$. Подставляя зависимости для усилий в уравнение перемещений, определяем α.

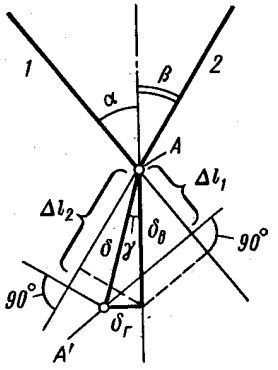


Рис. 2

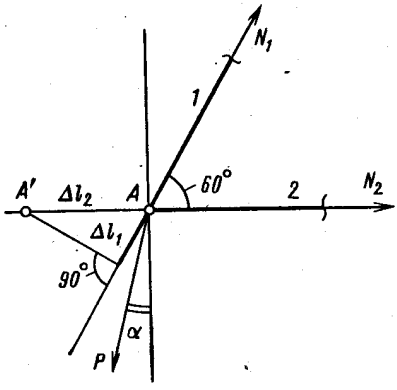


Рис. 3

1.07. $x = 1{,}5a$. Система в деформированном состоянии показана на рис. 4. Перемещение груза δ определяем по формуле $\delta = \frac{Pl}{EF}\frac{2x^2 - 6ax + 9a^2}{9a^2}$.

1.08. Во всех случаях $A = \frac{l}{2EF}(2P^2 - 2PT + T^2)$.

1.09. а) $A = 2{,}5\frac{P^2l}{EF}$; б) $A = \frac{7}{3}\frac{q^2l^3}{EF}$. Для решения задачи

рекомендуем построить эпюры внутренних сил и перемещений (рис. 5). Работа внешних сил равна: *а)* $A=\frac{1}{2}\left(2P\frac{3Pl}{EF}-P\times\right.$ $\left.\times\frac{Pl}{EF}\right)$; *б)* $A=\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^l 2qw_2\,dz-\int\limits_0^l qw_1\,dz\right)$, где $w_2=\frac{q}{EF}\left(\frac{5}{2}\,l^2+\right.$ $\left.+\,2lz-z^2\right)$ — уравнение перемещений на участке CD; $w_1=\frac{q}{EF}\left(l^2+lz+\frac{z^2}{2}\right)$ — то же для сечений участка BC.

1.10. $A=\frac{25}{18}\frac{P^2l}{EF}$. С помощью уравнений равновесия системы (рис. 6) определяем усилия в тягах CE, BK и KG, затем по закону Гука изменения длин этих тяг. Изобразив систему в деформированном состоянии, найдем уравнение совместности деформации стержней $2\delta-\frac{1}{2}(\delta+\Delta l_{CE})=\Delta l_{BK}+\Delta l_{GK}$. Перемещение точки K равно $\delta_K=2\delta-\Delta l_{BK}$. Уравнения перемещений записаны в предположении, что длина стержней BK и KG уменьшается, а стержня CE — увеличивается.

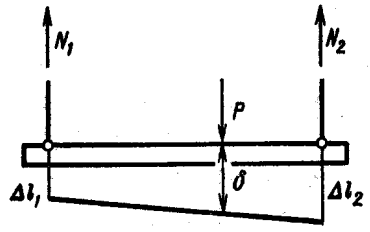


Рис. 4

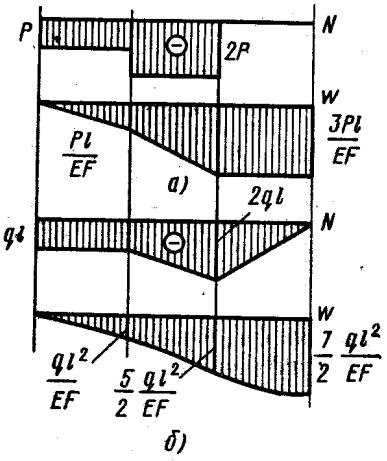
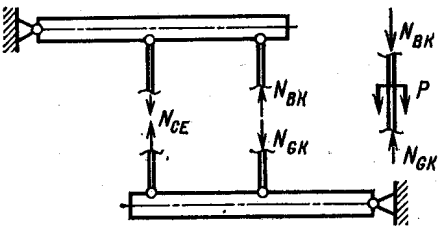


Рис. 5



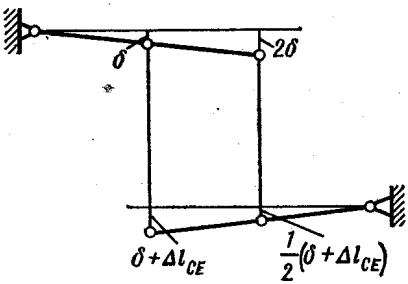


Рис. 6

1.11. $\delta = 0{,}187\,\frac{l}{Ed^2}$; $D = 2{,}79d$. Отсчитывая z от вершины конуса, получим

$$\delta = \int_l^{2l} \frac{1 \cdot dz}{E\pi d^2\left(\frac{z^2}{l^2} - \frac{1}{4}\right)} = \frac{1 \cdot l}{E\pi d^2} \ln \frac{\frac{z}{l} - \frac{1}{2}}{\frac{z}{l} + \frac{1}{2}}\Bigg|_l^{2l}.$$

1.12. $\alpha = 47{,}5°$; $D = 6{,}1d$. Масса конструкции $m = \rho\left\{\frac{N_{AB}l}{5\,[\sigma]} + \right.$ $\left. + \frac{N_{BC}l}{[\sigma]\cos\alpha}\right\}$, где ρ — плотность материала стержней. Выражая N_{AB} и N_{BC} через P с помощью условий равновесия узла B и приравнивая производную m по α нулю, для определения α получим уравнение $\mathrm{tg}^2\alpha = 1{,}2$. Соотношение диаметров D и d находим, подставив условия прочности $N_{AB} = 5\,[\sigma]\,F_{AB}$; $N_{BC} = [\sigma]\,F_{BC}$ в уравнения равновесия и вычислив отношения $F_{AB} : F_{BC}$, которое в данном случае равно $0{,}2\cos\alpha$.

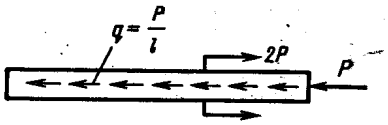


Рис. 7

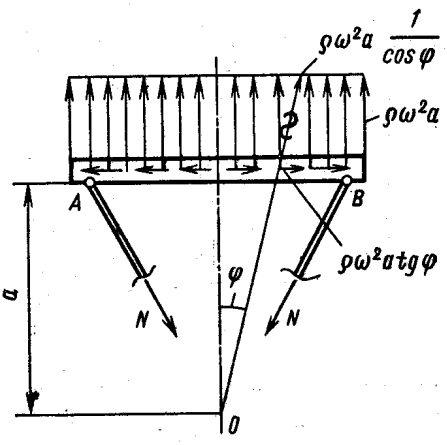


Рис. 8

1.13. $a = \frac{l}{4}$. При решении задачи необходимо учесть движение стержня. Поэтому, применяя принцип Даламбера, следует рассмотреть стержень, нагруженный сосредоточенными силами P и $2P$ и равномерно распределенной продольной нагрузкой интенсивностью $q = \frac{P}{l}$ (рис. 7).

1.14. $N = 45{,}0$ кН; $\Delta = 0{,}827$ мм; $n_т = 2{,}1$; $\sigma_{max} = 143{,}2$ МПа. Расчетная схема показана на рис. 8, вертикальные составляющие сил инерции не зависят от координаты φ, горизонтальные составляющие не влияют на деформацию тяг, так как брус AB по условию абсолютно жесткий.

1.15. $\alpha < 82°$. Из условия равновесия усилие в тяге $N = \frac{P}{2\cos\alpha}$. Приращение ΔN вследствие изменения угла α равно $\Delta N = \frac{\partial N}{\partial\alpha}\Delta\alpha = \frac{P}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\Delta\alpha$. Следовательно, $\left|\frac{\Delta N}{N}\right| = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \Delta\alpha$, но

$\Delta\alpha = \varepsilon \operatorname{tg}\alpha$ (рис. 9). Таким образом, $\left|\frac{\Delta N}{N}\right| = \varepsilon \operatorname{tg}^2\alpha$. Подставляя допустимые значения $\left|\frac{\Delta N}{N}\right|$ и ε, получим $\operatorname{tg}^2\alpha \ll 50$.

1.16. $T = \frac{EF}{2a^2}(\Delta_1^2 - \Delta_2^2)$, $P_{\max} = 0{,}384\frac{EF\Delta_1^3}{a^3}$, $\sigma_{\max} = \frac{E\Delta_1^2}{2a^2}$.

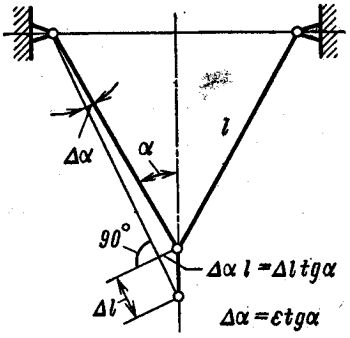


Рис. 9

Следует иметь в виду, что в данном случае не применим принцип начальных размеров. При $\Delta_1 \ll a$ и $\Delta_2 \ll a$ усилие T практически равно усилию в стержне CB или BD, которое определяется его деформацией $\Delta l = \frac{a}{\cos\beta} - a = a\frac{1-\cos\beta}{\cos\beta} = a2\sin^2\frac{\beta}{2} \approx a\frac{\beta^2}{2} \approx \frac{\Delta^2}{2a}$ (см. рис. 10), следовательно, $T = \frac{EF}{2a^2}(\Delta_1^2 - \Delta_2^2)$. Для определения $P_{\max}$ получим зависимость P от Δ. Очевидно (см. рис. 10), $P = 2T\frac{\Delta}{a}$, текущее значение T равно $T = \frac{EF}{2a^2} \times \times (\Delta_1^2 - \Delta^2)$, поэтому $P = \frac{EF}{a^3}(\Delta_1^2\Delta - \Delta^3)$. Производная P по Δ равна нулю при $\Delta_* = \frac{\Delta_1}{\sqrt{3}}$, наибольшее значение P получится из уравнения $P_{\max} = \frac{EF}{a^3}(\Delta_1^2\Delta_* - \Delta_*^3)$.

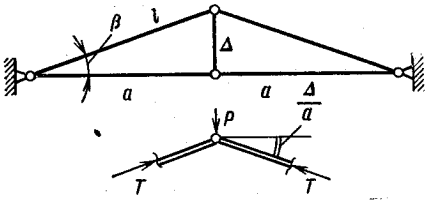


Рис. 10

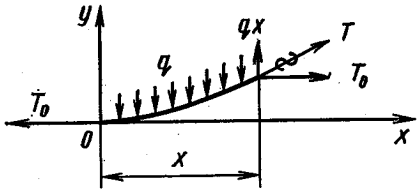


Рис. 11

1.17. $N = 110$ кН. Особенностью данной задачи является неприменимость принципа начальных размеров. Из условий равновесия узла A в деформированном состоянии следует $N = \frac{P}{2\alpha}$, где α — угол наклона стержня AB при действии силы P. Деформация стержня по закону Гука $\varepsilon = \frac{P}{2\alpha EF}$, геометрические соотношения дают зависимость $\Delta l = \frac{a}{\cos\alpha} - \frac{a}{\cos\alpha_0} = a\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha_0^2}{2}\right)$. Объединяя две последние формулы, получаем кубическое уравнение $\alpha^3 - \alpha\alpha_0^2 - \frac{P}{EF} = 0$, определяющее α.

1.18. $P = 12{,}5ql$. При малых провисах $f = \frac{ql^2}{8T_0}$ (см. пояснение к решению задачи 1.19), поэтому $T_0 = \frac{ql^2}{8f} = 12{,}5ql$. Вес груза без учета трения в блоке практически равен T_0.

1.19. $f = 1{,}23$ м; $T = 811$ Н. Уравнение кривой, определяющей форму провисшей нити, находим из условия $\frac{dy}{dx} = \frac{qx}{T_0}$ (рис. 11). После интегрирования, с учетом граничного условия $x = 0$, $y = 0$, получим $y = \frac{qx^2}{2T_0}$ и, следовательно, $f = \frac{ql^2}{8T_0}$. При малых провисах можно считать $T \approx T_0$, удлинение нити $\Delta l = \frac{Tl}{EF}$. С другой стороны, разность длин кривой и ее проекции определяется зависимостью $\Delta l = 2\int\limits_0^{l/2} \frac{1}{2}(y')^2\,dx$, поэтому $\Delta l = \frac{q^2l^3}{24T^2}$. Приравнивая полученные выражения для Δl, находим T, а затем $f = l\sqrt[3]{\frac{3}{64}\frac{ql}{EF}}$.

1.20. $f = 1$ м. В отличие от задачи 1.19 в данном случае разность длин кривой провисания и ее проекции равна $\Delta l = \frac{(T - T_0)\,l}{EF}$. Зависимость $\Delta l = \frac{q^2l^3}{24T^2}$ остается справедливой. Приравнивая эти величины, получаем кубическое уравнение $T^3 - 466T^2 - 534 \cdot 10^6 = 0$, откуда $T = 1000$ Н; $f = \frac{ql^2}{8T}$.

1.21. $a_{доп} = 20{,}1$ мм. Дополнительное наибольшее удлинение струны Δl, вызванное колебаниями с амплитудой a, равно $\Delta l = 2\int\limits_0^{l/2} \frac{1}{2}(y')^2\,dz$ (см. пояснения к решению задачи 1.19). Для синусоидальных колебаний $y = a\sin\frac{\pi z}{l}$ (см. рис. 1.20), $\Delta l = \frac{\pi^2a^2}{4l}$. С другой стороны, $\Delta l = \frac{\sigma}{E}l$, где σ — дополнительные напряжения, возникающие в натянутой струне вследствие колебаний. Приравнивая эти значения Δl, получим $\sigma = \frac{\pi^2a^2E}{4l^2}$. Условие прочности, определяющее $a_{доп}$, имеет вид $\sigma_0 + \sigma = [\sigma]$.

1.22. $P = \sqrt{2\delta qfEF}$. Под действием силы P деформируется участок ленты длиной l (рис. 12). На этом участке лента нагружена равномерно распределенными силами трения интенсивностью qf. Из условия равновесия определяем зависимость l от P. Перемещение δ равно удлинению участка ленты длиной l.

1.23. $\delta = \frac{qla}{2EF} + \frac{ql^2}{8EF}$; $\delta_{ост} = \frac{ql^2}{16EF}$. Схемы нагружения стержня при $P = P^*$, $P = P^*/2$ показаны на рис. 13. Там же изображена схема нагружения при разгрузке до некоторой силы

P_1, меньшей силы первичного нагружения $P = P^*/2$. Длина z^* участка, на котором при разгрузке началось обратное проскальзывание, определяется из условия равновесия $ql/2 = P_1 + 2qz^*$. При полной разгрузке $P_1 = 0$, $z^* = l/4$. Эпюра остаточных усилий показана на том же рисунке.

1.24. $t = 20$ °С. Напряжения в кольце до охлаждения и после одинаковые и равны $\sigma = 50$ МПа.

1.25. $P = \frac{\alpha + f}{D} 4\pi h \alpha EF$. Из условия равновесия кольца (рис. 14, *а*) $P = (qf \cos\alpha + q \sin\alpha)\pi D_1$ определяем интенсивность радиальных сил q, действующих на кольцо. Условие равновесия половины кольца (рис. 14, *б*) определяет усилие в кольце $N = \frac{qD_1}{2}(\cos\alpha - f \sin\alpha)$. Изменение радиуса кольца, равное

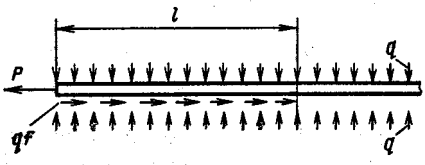


Рис. 12

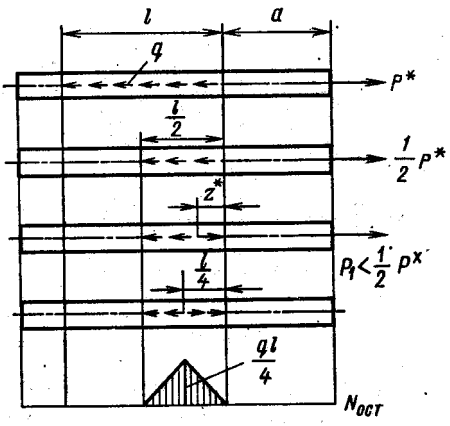


Рис. 13

$u = \frac{N}{EF}\frac{D_1}{2}$, связано со смещением h зависимостью $u = h \operatorname{tg}\alpha$. Таким образом, $h = \frac{PD_1}{4EF\pi \operatorname{tg}\alpha}\frac{\cos\alpha - f\sin\alpha}{f\cos\alpha + \sin\alpha}$.

При получении окончательного результата учитываем малость угла α и условие $d \ll D$.

1.26. $P = 406$ Н; $\delta = 3{,}52$ мм. Из условия равновесия элемента ленты (рис. 15, *б*) следует $\frac{dN}{N} = f\,d\varphi$, откуда после интегрирования получим $N = Ce^{f\varphi}$. Постоянную C определяем из условия $\varphi = 0$, $N = N_2$. Усилие

$$N_1 = N_2 e^{f\alpha}. \qquad (1)$$

Запишем уравнение моментов сил, действующих на шкив (рис. 15, *а*):

$$M = (N_1 - N_2)R = N_2 R(e^{f\alpha} - 1). \qquad (2)$$

Из уравнения (2) с учетом (1) определяем N_2. Сила P с усилием N_2 связана зависимостью $PL = N_2 a$, поэтому $P =$

$= \frac{a}{L}\frac{M}{R(e^{f\alpha}-1)}$. Для определения δ вычисляем изменение длины ленты: $\Delta l = \frac{N_2 l_2}{EF} + \frac{N_1 l_1}{EF} + \int_0^{\alpha} \frac{N_2 e^{f\varphi} R\, d\varphi}{EF}$, а затем находим $\delta = \Delta l \frac{L}{a}$.

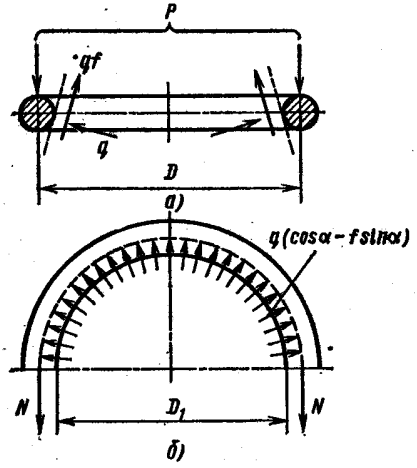


Рис. 14

1.27. $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\sigma_{пц} = 260$ МПа; $\sigma_т = 400$ МПа. Графические построения для

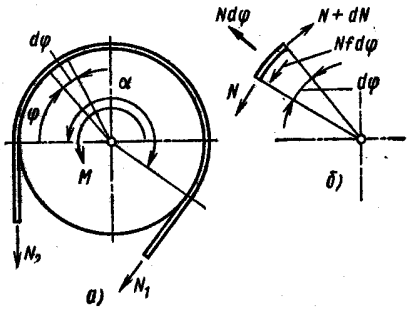


Рис. 15

определения E, $\sigma_{пц}$ и $\sigma_т$ показаны на рис. 16, *а* и *б* соответственно.

1.28. См. рис. 17 (для низкоуглеродистой стали начальный участок диаграммы показан в более крупном масштабе).

1.29. См. рис. 18.

1.30. См. рис. 19 (*а* — растяжение, *б* — сжатие).

1.31. Форма образца *1* (так называемый образец с предопределенным местом разрушения) показана на рис. 20, *а*. Для построения характеристики материала одновременно испытывается обычный образец *2*; характеристика показана на рис. 20, *б*.

1.32. Эпюры усилий и перемещений показаны на рис. 21. Наибольшие напряжения и перемещения равны: *а*) 60 МПа; 0,04 мм; *б*) 100 МПа; 0,10 мм; *в*) 400 МПа; 0,50 мм.

1.33. Эпюры напряжений и перемещений для трубки

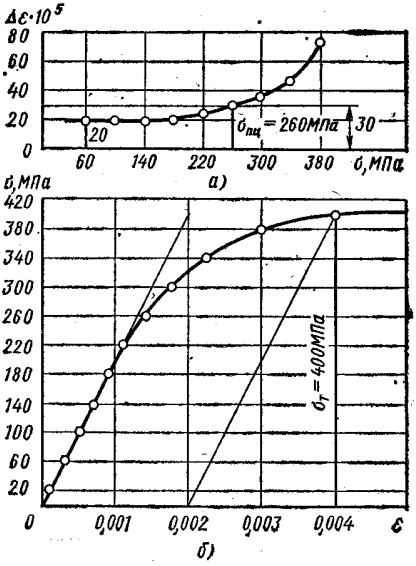


Рис. 16

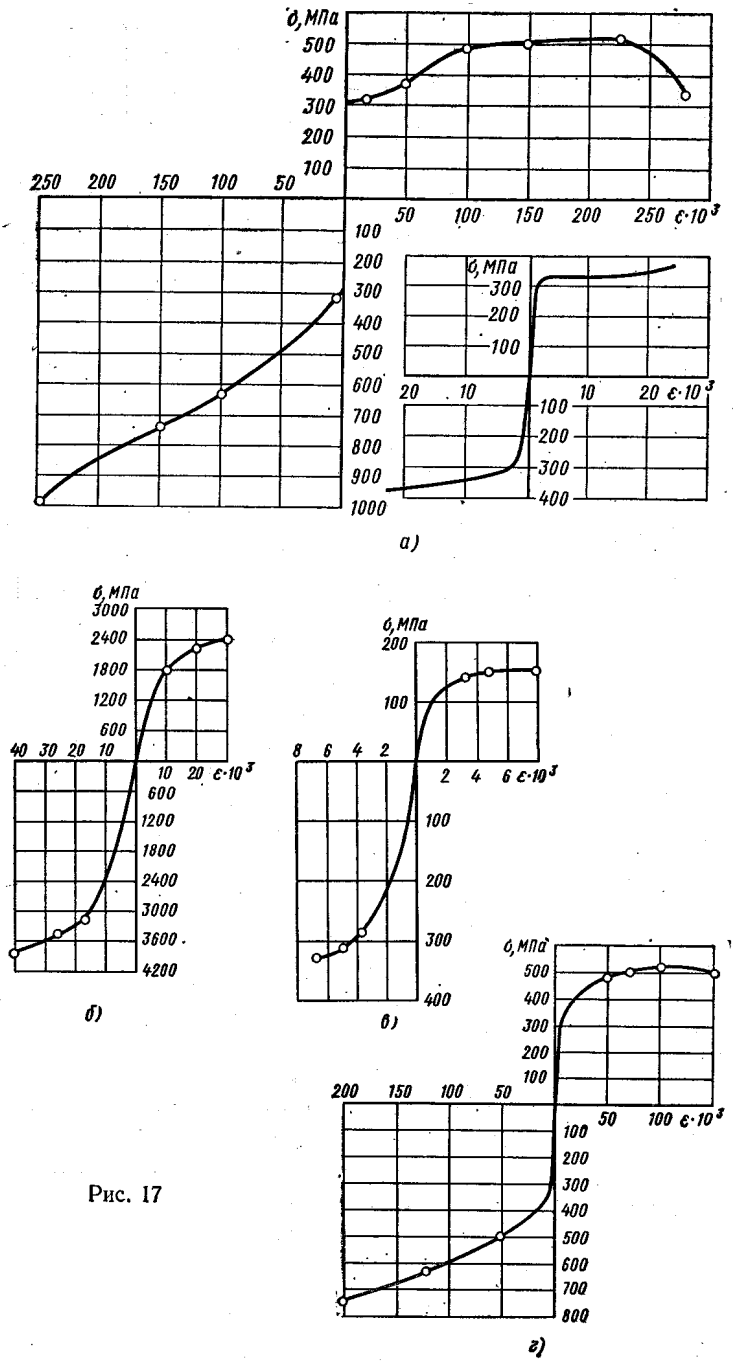

σ, МПа
500
400
300
200
100
50 100 150 200 250 ε·10³
250 200 150 100 50
100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
σ, МПа
300
200
100
20 10
10 20 ε·10³
100 200 300 400
а)
σ, МПа
3000 2400 1800 1200 600
40 30 20 10
10 20 ε·10³
600 1200 1800 2400 3000 3600 4200
б)
σ, МПа
200
100
8 6 4 2
2 4 6 ε·10³
100 200 300 400
в)
σ, МПа
500 400 300 200 100
50 100 ε·10³
200 150 100 50
100 200 300 400 500 600 700 800
г)

Рис. 17

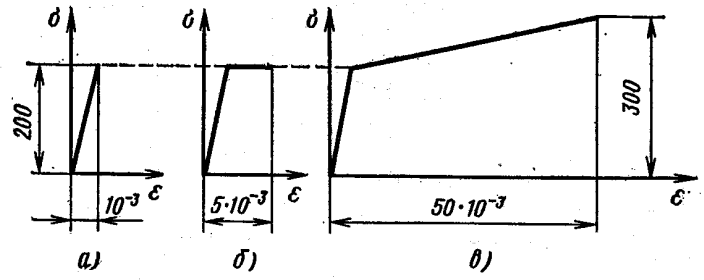


Рис. 18

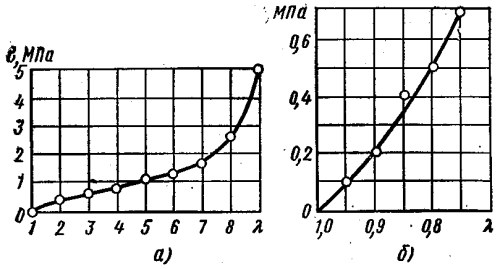


Рис. 19

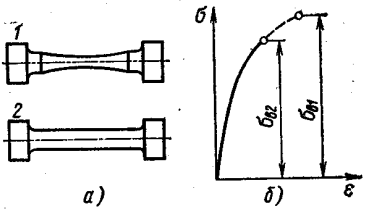


Рис. 20

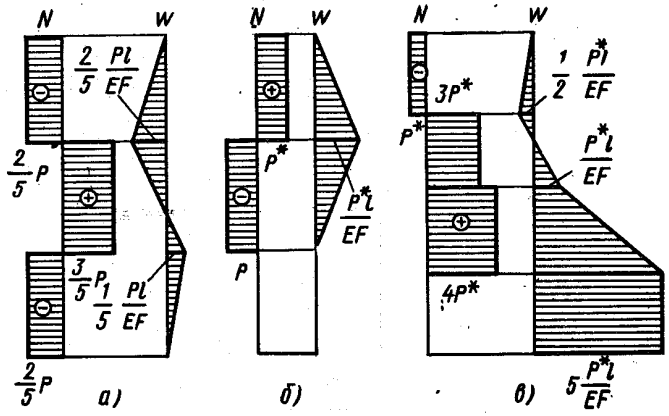


Рис. 21

показаны на рис. 22, *а*, для бруса — на рис. 22, *б*. Сила взаимодействия между брусом и трубкой определяется по формуле

$$N = \frac{8}{7} tE_{м}F(\alpha_{м} - \alpha_{ст}).$$

1.34. $P = \alpha tEF$, эпюры усилий и перемещений показаны на рис. 23.

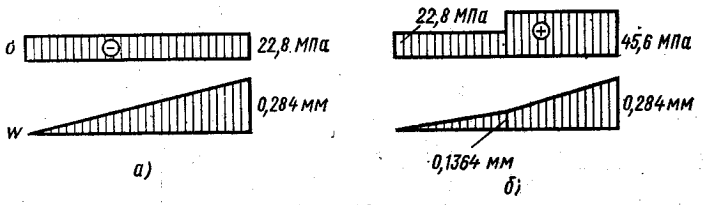


Рис. 22

1.35. $A = U = \frac{5}{18}\frac{P^2 l}{EF}$. При вычислении работы следует учесть, что перемещение точки приложения силы не пропорционально силе.

1.36. $a = \frac{l}{5}$. Напомним, что участки бруса равнопрочны, если они имеют одинаковый коэффициент запаса. Поэтому усилия на участках AB и BC связаны соотношением $N_{BC} = \frac{2}{3} N_{AB}$. Но $N_{AB} + N_{BC} = P$, следовательно, $N_{AB} = \frac{3}{5} P$, $N_{BC} = \frac{2}{5} P$. Размер a определяется из уравнения перемещений: укорочение участков AB и CD равно удлинению участка BC, т. е. $2\frac{3Pa}{5EF} = \frac{2}{5}\frac{P(l-a)}{EF}$.

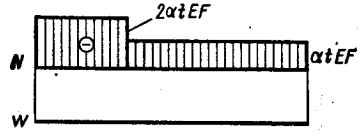


Рис. 23

1.37. Зависимости усилий N_{AC}, N_{BC} и перемещения поршня w от силы P показаны на рис. 24. При $P \leqslant T$ реакции опор R_A и R_B равны нулю, поршень C неподвижен. При $P \geqslant T$ $N_{AC} + N_{BC} = P - T$; $\frac{N_{AC}\frac{3}{5}l}{EF} = \frac{N_{BC}\frac{2}{5}l}{EF}$.

Рассмотрим процесс разгрузки, который представим как нагружение поршня справа силой P^*. Движение поршня влево начнется тогда, когда сила f станет равной T. При $f \leqslant T$ (см. рис. 24) $N_{AC} + N_{BC} = P + f - P^*$, но $N_{AC} + N_{BC} = P - T$, следовательно, $f = P^* - T$ и $P^* \leqslant 2T$, т. е. пока сила разгрузки P^* не превышает $2T$, поршень остается неподвижным. При $P \geqslant 2T$ остаточные усилия и перемещения не зависят от силы P.

1.38. а) усилия во всех стержнях (рис. 25,*а*) равны по $P/2$, работа $A = \frac{3}{4}\frac{P^2 l}{EF}$; б) $N_1 = 0{,}765P$; $N_2 = 0{,}235P$; $N_3 = 0{,}408P$; $N_4 = 0{,}471P$; $A = 0{,}956\frac{P^2 l}{EF}$. Приведем основные уравнения для

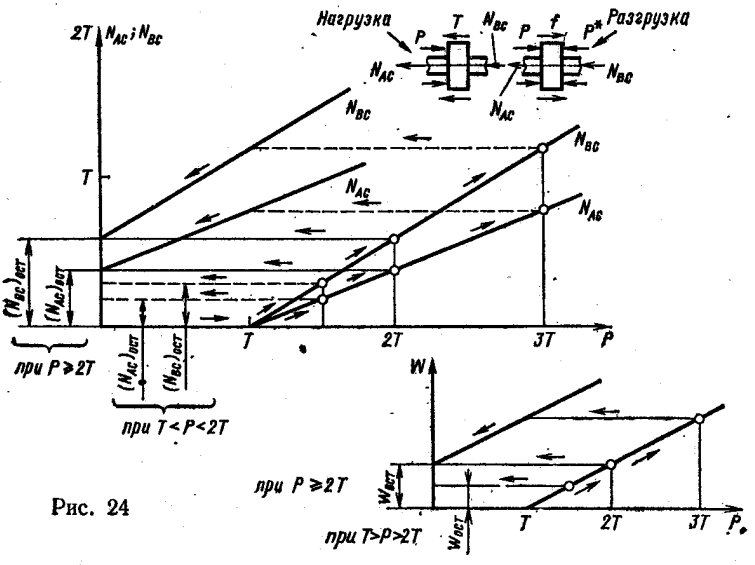


Рис. 24

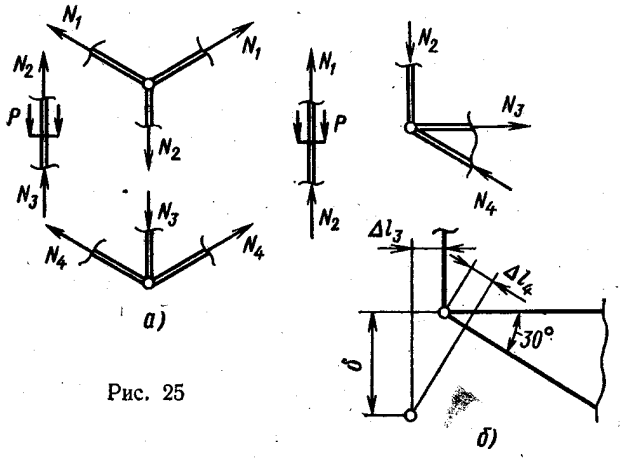


Рис. 25

случая б. Уравнения равновесия (рис. 25, *б*) $N_1 + N_2 = P$; $N_2 = N_4 \sin\alpha$; $N_3 = N_4 \cos\alpha$. Уравнение совместности деформации стержней $\Delta l_1 - \Delta l_2 = \Delta l_3 \operatorname{ctg}\alpha + \frac{\Delta l_4}{\sin\alpha}$ или, с учетом закона

Гука, после некоторых преобразований $\frac{5}{2}N_1 - \frac{N_2}{2} = N_3 \operatorname{ctg}\alpha + \frac{N_4}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

1.39. $l_3 = 1{,}001$ м. Внутренние силы в стержнях и перемещения их верхних торцев показаны на рис. 26. Уравнения равновесия $N_1 + N_3 = N_2 + N_4$; $2N_4 + N_1 = N_3$. Условия совместности деформаций $\Delta l_1 = a - \Delta l_2$; $\Delta l_1 = b - \Delta l_4$, где $a = 2$ мм, $b = 1$ мм. Решая систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными, определяем N_3, затем вычисляем $\Delta l_3 = 1{,}5$ мм и $\Delta l_1 = 0{,}5$ мм. Сравнение этих величин показывает, что фактическая длина третьего стержня от номинальной должна отличаться на $x = 1$ мм.

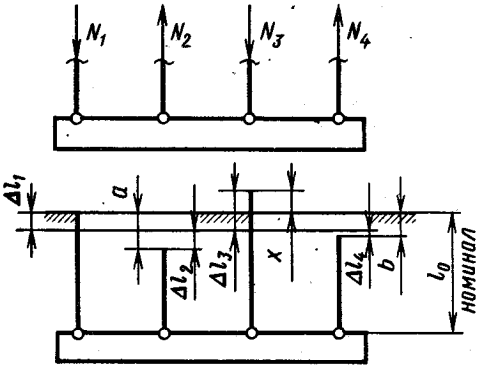


Рис. 26

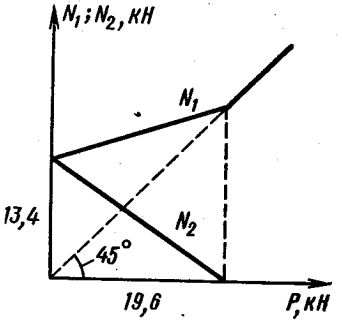


Рис. 27

1.40. $N_0 = 13{,}4$ кН, зависимость усилий в болте N_1 и трубке N_2 от силы P определяем по формулам $N_1 = N_0 + 0{,}32P$; $N_2 = N_0 - 0{,}68P$, графики этих зависимостей показаны на рис. 27.

Основные уравнения: усилие затяжки N_0 определяем из условия $\frac{N_0 l}{E_1 F_1} + \frac{N_0 l}{E_2 F_2} = \frac{s}{4}$ (индексом 1 обозначены величины, относящиеся к болту, индексом 2 — к трубке); рабочие усилия в болте и трубке связаны зависимостями $N_1 = P + N_2$; $\frac{N_1 l}{E_1 F_1} + \frac{N_2 l}{E_2 F_2} = \frac{s}{4}$.

Рассмотрим графическое решение данной задачи. Изобразим в правой системе координат N_2, Δl_2 (рис. 28) характеристику *2* трубки (зависимость усилия от удлинения). На расстоянии $\frac{s}{4}$ поместим начало координат левой системы N_1, Δl_1 и начертим в этих осях характеристику *1* болта. Ордината точки пересечения характеристик болта и трубки определяет усилие затяжки N_0, абсциссы Δl_{01} и Δl_{02} — деформации болта и трубки после затяжки.

Под действием силы P деформация болта увеличивается, а деформация трубки уменьшается, разность ординат N_1 и N_2 равна в соответствующем масштабе силе P. При $P = P^*$ ($P^* = 19\,640$ Н) усилие в трубке становится равным нулю. Дальнейшее увеличение силы P воспринимается только болтом.

1.41. $N_1 = 105{,}4$ кН; $N_2 = 77{,}4$ кН. Усилия в болтах и прокладке определяем, решая систему уравнений $N_2 = N_1 - P$; $N_0(\delta_1 + \delta_2) = N_1\delta_1 + N_2\delta_2$. Графическое решение (см. пояснения к решению задачи 1.40) показано на рис. 29: *2* — характеристика прокладки; *1* — характеристика болта.

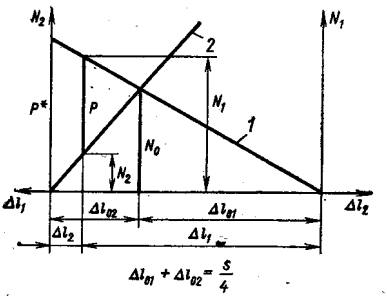


Рис. 28

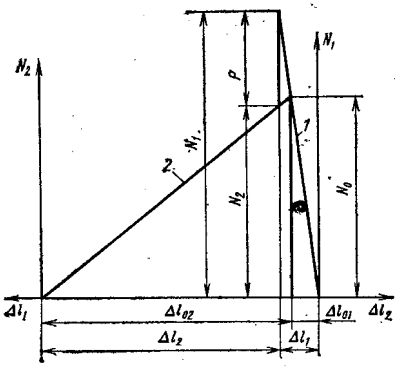


Рис. 29

Отметим, что если жесткость болтов много больше жесткости прокладки, то воздействие нагрузки P на соединение мало влияет на усилие в прокладке. Для нарушения плотности такого соединения требуется весьма большая сила.

1.42. $N_1 = 103$ кН. Пояснения см. в решении задачи 1.40. Графическое решение показано на рис. 30: *2* — характеристика прокладки; *1* — характеристика болта. Следует отметить, что в соединении с весьма жесткой прокладкой небольшое увеличение рабочей нагрузки P может привести к нарушению плотности соединения.

1.43. $h_1 : h_2 = \sqrt{E_2 : E_1}$. Обозначим усилие в сечениях верхней пластины N_1, нижней N_2, тогда из условия равновесия следует $N_1 h_1/2 = N_2 h_2/2$. Условие неискривляемости стержня имеет вид $\frac{N_1 l}{E_1 b h_1} = \frac{N_2 l}{E_2 b h_2}$. Исключая из системы уравнений N_1 и N_2, найдем отношение толщин h_1 и h_2.

1.44. $t = 80$ °С; $\sigma = 100$ МПа; $\Delta^* = 0{,}3$ мм. Радиальное перемещение точки кольца радиусом R равно $u = \varepsilon_t R$, где ε_t — окружная деформация. Поэтому при нагреве $\Delta = \alpha t D$, откуда $t = \frac{\Delta}{\alpha D}$. Усилия, возникающие в кольцах после охлаждения, одинаковы (рис. 31), напряжения тоже (так как толщина одина-

кова), натяг складывается из уменьшения диаметра внутреннего кольца и увеличения наружного кольца, т. е. $\Delta = \alpha t D = \frac{\sigma_1}{E} D + \frac{\sigma_2}{E} D$, следовательно, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \alpha t E/2$. Так как $\sigma_{т.р} < \sigma_{т.с}$, более напряженным является растянутое наружное кольцо, поэтому условие прочности для определения Δ^* имеет вид $\sigma = \sigma_{т.р}/2$, или $\Delta^* E/2D = \sigma_{т.р}/2$.

1.45. В медном кольце $\sigma_1 = 20$ МПа, в стальном $\sigma_2 = 40$ МПа. Основные уравнения, разрешающие данную задачу: уравнение равновесия $\sigma_1 h_1 b = \sigma_2 h_2 b$; уравнение перемещений $(\alpha_1 - \alpha_2)\, tD =$

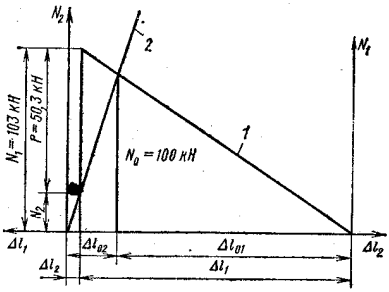


Рис. 30

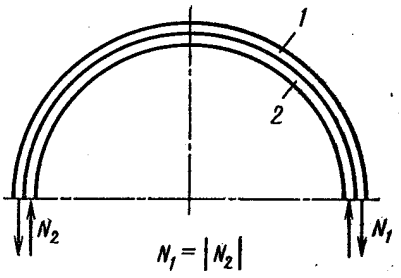


Рис. 31

$= \left(\frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{\sigma_2}{E_2}\right) D$, где индексом 1 обозначены величины, относящиеся к медному кольцу, индексом 2 — к стальному.

1.46. $\sigma_0 = 182$ МПа; $\sigma_c = 225$ МПа. При большом числе спиц их действие на обод можно заменить равномерно распределенной радиальной нагрузкой интенсивностью $q = \frac{72 N_c}{\pi D}$, где N_c — усилие в спице. Усилие в ободе N_0 определяем из условия равновесия (рис. 32) $2N_0 = qD$. Условие совместности деформаций обода и спицы имеет вид $\frac{N_c l}{(EF)_c} + \frac{N_0 D}{(EF)_0 \cdot 2} = \Delta$.

Решая полученные уравнения с двумя неизвестными N_0 и N_c определим усилия в ободе и спицах.

1.47. $$\Delta l = \frac{E}{2b}\left[l - \frac{2}{3}\frac{E^2F}{4bq}\left(1 - \sqrt{\left(1 - \frac{4bql}{E^2F}\right)^3}\right)\right];$$

$$A = \frac{1}{2} q \frac{E}{2b}\left\{\frac{l^2}{2} + \frac{2}{3}\frac{E^2F}{4bq} l \sqrt{\left(1 - \frac{4bql}{E^2F}\right)^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3}\frac{E^2F}{4bq}\frac{2}{5}\frac{E^2F}{4bq}\left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{4bql}{E^2F}\right)^5}\right]\right\};$$

$$U_{упр} = \frac{q^2 l^3}{6EF}; \quad \Delta l_{ост} = \Delta l - \frac{ql^2}{2EF}.$$

С помощью предельного перехода (при $b \to 0$) из формул для Δl и A можно получить соответствующие зависимости для ли-

нейно-упругого материала. Предлагаем читателю проделать это самостоятельно.

1.48. Характеристика бруса показана на рис. 33.

$$w_{c\,I} = \frac{23}{6}\varepsilon_0 l; \quad w_{c\,ост} = \varepsilon_0 l; \quad w_{c\,II} = \frac{25}{8}\varepsilon_0 l; \quad n_т = 1{,}33; \quad n_в = 1{,}5.$$

1.49. Для характеристики, изображенной на рис. 1.42, *в*

а) $P_т = P_{пр} = 1{,}5\sigma_т F$; $\sigma_{ост} = 0$; $w_{ост} = 0$;

б) $P_т = P_{пр} = \sigma_т F$; $\sigma_{ост} = 0$; $w_{ост} = 0$.

Для характеристики, изображенной на рис. 1.42, *г*:

а) $P_т = \sigma_т F$; $P_{пр} = 1{,}4\sigma_т F$; $\sigma_{ост} = 0$; $w_{ост} = 1{,}8\varepsilon_т l$;

б) $P_т = \sigma_т F$; $P_{пр} = 1{,}4\sigma_т F$; $\sigma_{ост} = 0$; $w_{ост} = 1{,}8\varepsilon_т l$.

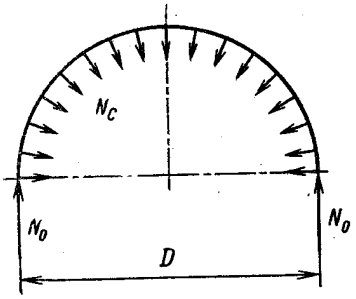


Рис. 32

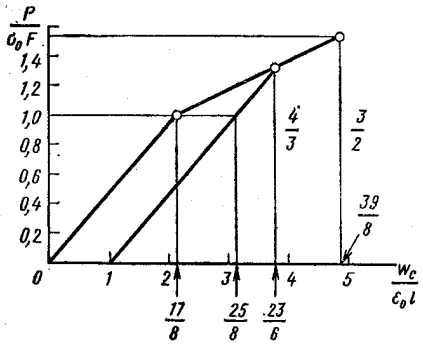


Рис. 33

1.50. Предельная нагрузка $P_{пр}$ равна:

а) $1{,}5\sigma_т F$; *б*) $2{,}5\sigma_т F$; *в*) $\frac{8}{3}\sigma_т F$; *г*) $2{,}73\sigma_т F$.

Кинематически возможные схемы исчерпания несущей способности для случаев *а* и *г* и реализуемые варианты для случаев *б* и *в* показаны на рис. 34.

1.51. а) $\Delta l_{AB} = \Delta l_{BC}$ (см. рис. 1.44), но $L_{AB} < L_{BC}$, поэтому напряжения на участке AB больше, чем на участке BC. Следовательно, первые пластические деформации появятся на участке AB. При разгрузке, в случае отсутствия одной из опор, брус получил бы остаточное удлинение. Наличие обеих опор приводит к возникновению остаточных напряжений сжатия.

б) Остаточные напряжения — растягивающие.

в) После разгрузки стержни AD и CD растянуты, стержень DB сжат. В данном случае, из условия совместности деформаций стержней следует, что деформация, а значит, и напряжения больше в стержне DB, где и появятся первые пластические деформации удлинения.

г) Оба стержня растянуты. Для выяснения положения наиболее напряженного участка следует рассмотреть условие совместности деформаций стержней.

1.52. а) $1{,}5\varepsilon_т l$; б) $2\varepsilon_т l$. Для получения решения следует выяснить, на каком участке появление пластических деформаций приводит к исчерпанию несущей способности конструкции, иными словами, какой участок «течет» последним (см. решение задачи 1.51). Деформация на этом участке при достижении нагрузкой предельного значения равна $\varepsilon_т$. Зная длину участка, можно вычислить изменение этой длины, а на основе геометрических зависимостей — перемещение точки приложения нагрузки.

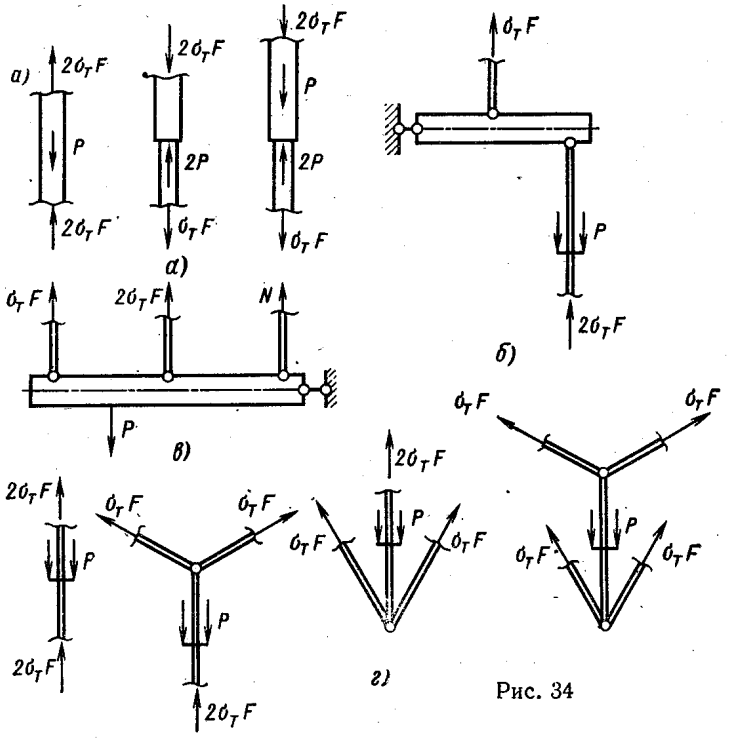


Рис. 34

1.53. Зависимости N и w_C от силы P показаны на рис. 35:

а) $N_{ост} = \frac{1}{4}\sigma_т F$ (сжатие), $w_{с\,ост} = \frac{3}{8}\varepsilon_т l$;

б) $N_{1\,ост} = N_{3\,ост} = \frac{1}{6}\sigma_т F$ (сжатие); $N_{2\,ост} = \frac{1}{3}\sigma_т F$ (растяжение), $w_{с\,ост} = \frac{7}{12}\varepsilon_т l$.

1.54. На участке AC остаточные напряжения $\sigma_{ост} = \frac{1}{20}\sigma_т$, на участках CD и BD $\sigma_{ост} = \frac{1}{10}\sigma_т$. Для проверки приведем некоторые промежуточные результаты: фактические усилия $N_{BD} = -\sigma_т F$; $N_{CD} = \frac{3}{8}\sigma_т F$; $N_{AC} = \frac{7}{4}\sigma_т F$; усилия разгрузки

$N_{BD} = \frac{4}{5}P$; $N_{CD} = -\frac{1}{5}P$; $N_{AG} = -\frac{6}{5}P$; остаточные усилия $N_{AG} = N_{CD} = N_{BD} = \frac{1}{10}\sigma_т F$ (остаточное усилие растягивающее).

1.55. $\delta_{ост} = \frac{3}{4}\frac{\sigma_т l}{E}$. Обозначим участки стержней цифрами (см. рис. 1.48). Приведем некоторые промежуточные данные: при действии заданной силы P усилия в стержнях равны: $N_1 = \sigma_т F$; $N_2 = -\frac{2}{3}\sigma_т F$; $N_3 = \frac{2}{3}\sigma_т F$, перемещение сечения A вычисля-

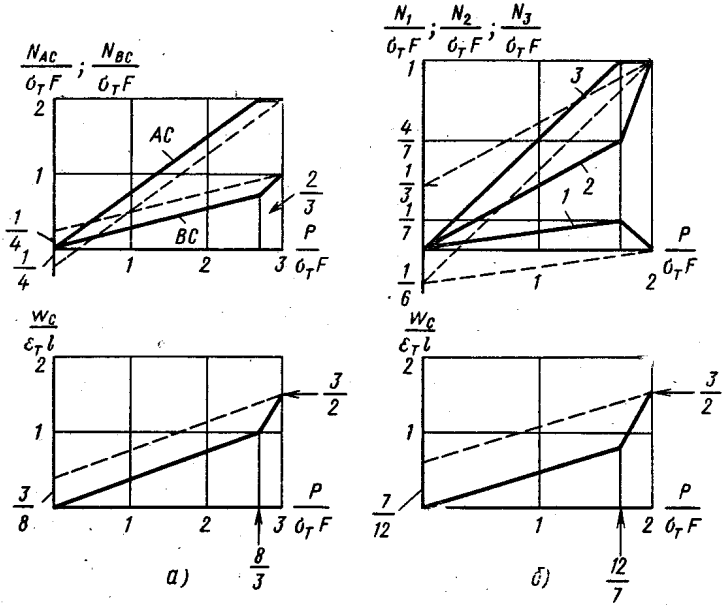


Рис. 35

ется по формуле $\delta = \frac{\Delta l_3}{\cos\alpha} + \Delta l_2$ и равно $\delta = 2\varepsilon_т l$; усилия разгрузки $N_1 = -\frac{3}{4}P$; $N_2 = \frac{1}{4}P$; $N_3 = -\frac{1}{4}P$, перемещение разгрузки $\delta_{разгр} = \Delta l_1 = -\frac{3}{4}\frac{Pl}{EF}$; остаточное перемещение $\delta_{ост} = \delta + \delta_{разгр}$.

1.56. $n = 1{,}5$. На рис. 36 показано графическое решение. Из условия совместности деформаций болта и трубки при затяжке (см., например, решение задачи 1.40) следует, что в трубке появляются пластические деформации и усилие затяжки $N_0 = \sigma_{т.с} F_2$ (индексом 2 будем отмечать величины, относящиеся к трубке, а индексом 1 — к болту). Деформация болта при затяжке $\Delta l_{01} = \frac{N_0 l}{(EF)_1}$, деформация трубки $\Delta l_{02} = \Delta_{зат} - \Delta l_{01}$. При действии

силы P усилие в болте N_1 увеличивается: $N_1 = N_0 + N_1^*$, а усилие в трубке N_2 уменьшается: $N_2 = N_0 - N_1^*$, причем $\frac{N_1^* l}{(EF)_1} = \frac{N_2^* l}{(EF)_2}$, а $N_1 = P + N_2$. Решение этих уравнений дает $N_1^* = 0{,}496P$; $N_2^* = 0{,}504P$. Предположим, что при увеличении нагрузки появятся пластические деформации в болте, т. е. $N_1 = N_0 + 0{,}496P'_{пр} = \sigma_{т.р}F_1$, откуда $P'_{пр} = 28\,300$ Н. Если же предположить, что раньше нарушится контакт между болтом и трубкой, то $N_0 - 0{,}504P''_{пр} = 0$ и $P''_{пр} = 31\,600$ Н. Но при силе $P''_{пр}$ напряжение в болте превышает предел текучести стали, поэтому нарушение контакта между болтом и трубкой произойдет при $P'''_{пр} = \sigma_{т.р}F_1 = 30\,000$ Н (см. рис. 36). Сравнение величин $P'_{пр}$ и $P'''_{пр}$ показывает, что исчерпание несущей способности данной конструкции происходит вследствие возникновения пластических деформаций в болте и $P_{пр} = 28{,}3$ кН. Коэффициент запаса $n = P_{пр}/P$.

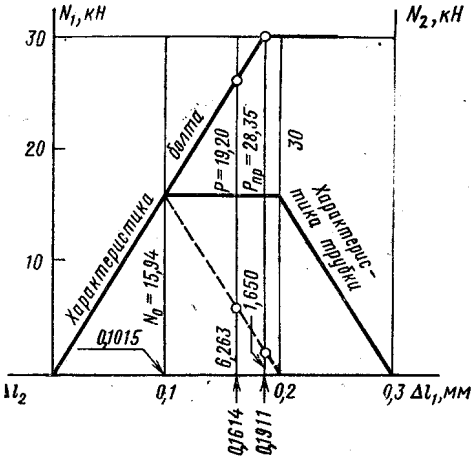


Рис. 36

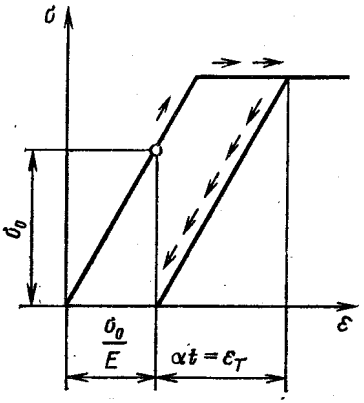


Рис. 37

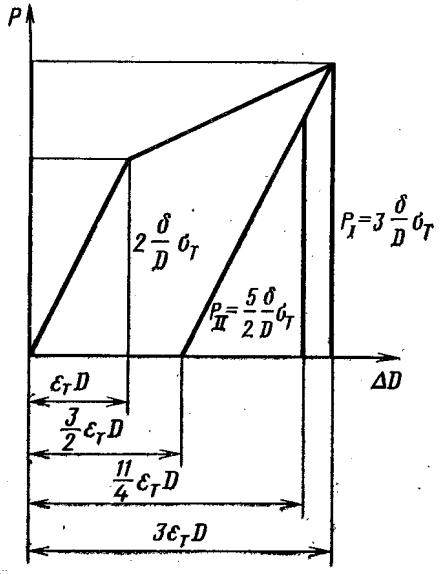


Рис. 38

1.57. $t = \frac{\sigma_т}{E\alpha}$. Брус можно свободно вынуть из опор, если его нагреть так, чтобы остаточная деформация после остывания была равна деформации первоначального сжатия. Графическое решение показано на рис. 37.

1.58. Характеристика кольца показана на рис. 38, $\Delta D_1 = 3\varepsilon_т D$; $\Delta D_{ост} = \frac{3}{2}\varepsilon_т D$; $\Delta D_2 = \frac{11}{4}\varepsilon_т D$. Усилие, возникающее в кольце под действием давления, равно $N = \frac{pD}{2} b$, напряжение $\sigma_t = \frac{pD}{2h}$. При $\sigma_t \leqslant \sigma_т$ изменение диаметра определяем по формуле $\Delta D = \frac{pD^2}{2hE}$. Давление $p_т$, при котором в кольце появляются первые пластические деформации, $p_т = 2\frac{h}{D}\sigma_т$. При $p > p_т$ $\Delta D = \left[\varepsilon_т + 4\frac{\varepsilon_т}{\sigma_т}(\sigma_t - \sigma_т)\right] D$, откуда при $p = p_1$ $\Delta D_1 = 3\varepsilon_т D$. Остаточное изменение диаметра после разгрузки $\Delta D_{ост} = \Delta D_1 - \frac{p_1 D^2}{2Eh}$, изменение диаметра после вторичного нагружения ΔD_2 складывается из остаточного и дополнительного, вызванного вторичной нагрузкой: $\Delta D_2 = \Delta D_{ост} + \frac{p_2 D^2}{2Eh}$.

1.59. Обычно под коэффициентом запаса, например по текучести, понимают отношение $\sigma_т/\sigma_{max}$. Для конструкций рассматриваемого типа, состояние которых определяется окружной скоростью v, под коэффициентом запаса естественно понимать отношение скоростей $n_т = v_т/v$; $n_в = v_в/v$, где $v_т = \sqrt{\sigma_т/\rho}$ — скорость, при которой появляются первые пластические деформации; $v_в = \sqrt{\sigma_в/\rho}$ — скорость, при которой кольцо разрушается. В данном случае $n_т = 1{,}6$, $n_в = 2{,}3$.

1.60. При силе $P = 25$ кН плита касается опор, а разрушение тяг невозможно. Коэффициент запаса по разрушению в случаях а) и б) не имеет смысла.

2.01. См. рис. 39.

2.02. См. рис. 40. Уравнения изгибающих моментов для рамы, показанной на рис. 2.02, *е*, имеют вид $\mathcal{M}_1 = \frac{1}{2} PR \sin\alpha - \frac{1}{2} PR(1 - \cos\alpha)$; $\mathcal{M}_2 = \frac{3}{2} PR \sin\beta + \frac{1}{2} PR(1 - \cos\beta)$; $\mathcal{M}_3 = \frac{3}{2} \times PR \sin\psi - \frac{1}{2} PR(1 - \cos\psi)$

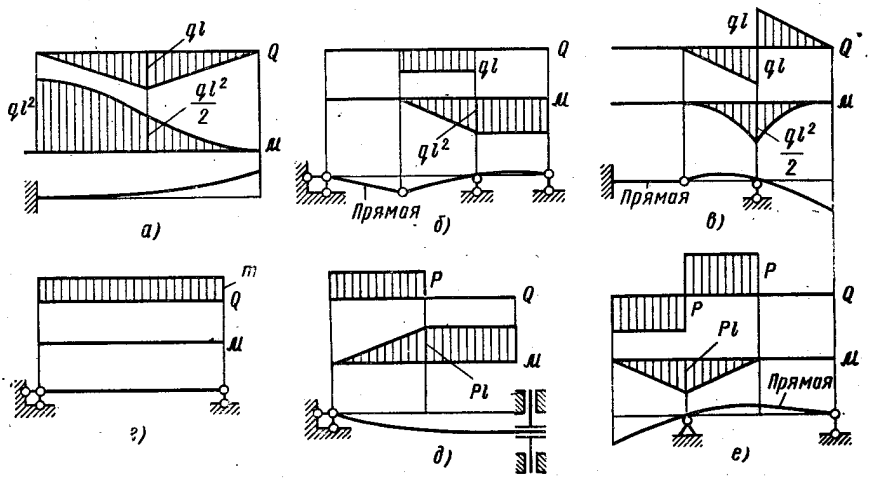


Рис. 39

2.03. См. рис. 41.

2.04 $z_* = \frac{7}{16} l$ или $z_* = \frac{5}{16} l$. Наибольший изгибающий момент в обоих случаях $\mathcal{M}_{max} = \frac{49}{256} Pl = 0{,}1914 Pl$. Уравнения для определения моментов $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ (см. рис. 42) имеют вид $\mathcal{M}_1 = \left(\frac{7}{8} - \frac{z}{l}\right) Pz$, $\mathcal{M}_2 = \left(\frac{1}{8} + \frac{z}{l}\right) P \left(\frac{3}{4} l - z\right)$. Значение z_* определяем из условий экстремальности функций $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$.

2.05. $a = 0{,}536l$. Условие для определения a имеет вид $\frac{2P(l-a)}{4l-a} 2l = Pa$.

2.06. $a = \frac{1}{4} l$.

2.07. $d = 100$ мм; $D = 120$ мм; $D_{ср} = 136$ мм; $a = 85$ мм; $b = 53$ мм; двутавр № 16; $B_{ср} = 67$ мм. Отношения площадей сечений к площади двутавра равны 3,89; 2,01; 1,44; 3,58; 2,78; 1,0; 1,33.

2.08. Очевидно, при одинаковом перемещении свободного конца $P_1 \lessdot P_2$. Так как максимальное напряжение в обоих случаях равно $\sigma_{max} = Pl/W_x$, при равных l и W_x напряжение тем больше, чем больше сила. Следовательно, в балке, изображенной на рис. 2.08, *б*, максимальное напряжение больше.

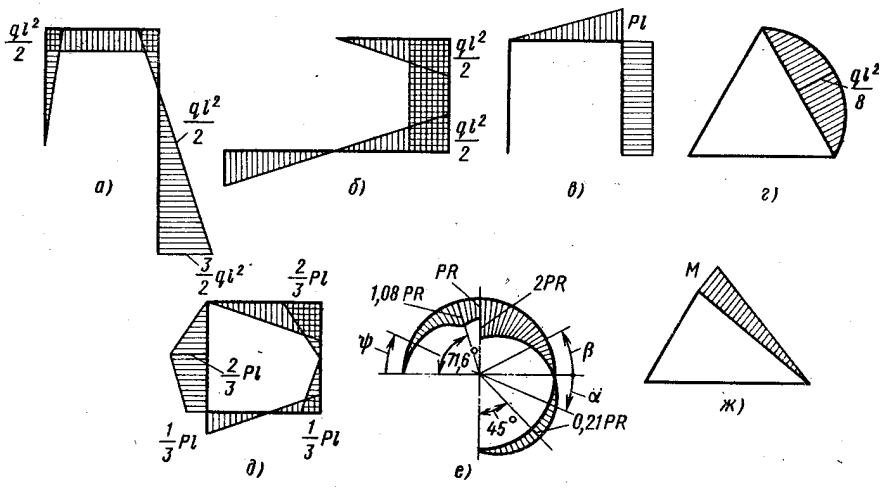


Рис. 40

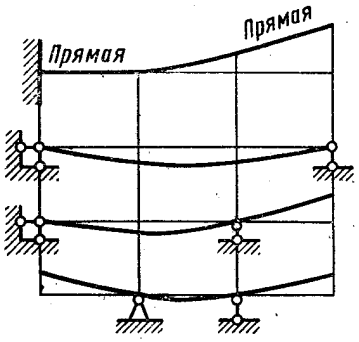


Рис. 41

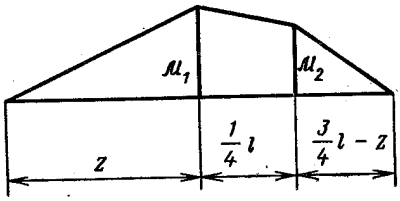


Рис. 42

2.09. На участке AB ось бруса должна иметь форму дуги окружности радиусом $R = \frac{EI_x}{Pa}$.

2.10. Жесткость не изменится, прочность в положении *б* в $\sqrt{2}$ раз меньше.

2.11. $b = kz$, где k — коэффициент пропорциональности. Форма изогнутой оси — окружность.

2.12. $a = l/\sqrt{3}$. Расстояние между точками на поверхности стержня, измеренное по его поверхности, не изменится, если

$$\int_l \varepsilon_z \, dz = 0 \qquad (1)$$

Но $\varepsilon_z = \frac{h}{2\rho}$; $\frac{dz}{\rho} = d\theta$, поэтому условие (1) принимает вид

$$\int_l d\theta = 0 \quad \text{или} \quad \theta_A - \theta_B = 0, \qquad (2)$$

где $\theta = y'$ — угол поворота поперечного сечения; y — прогиб. Вследствие симметрии и условия (2) $\theta_A = \theta_B = 0$. Из дифферен-

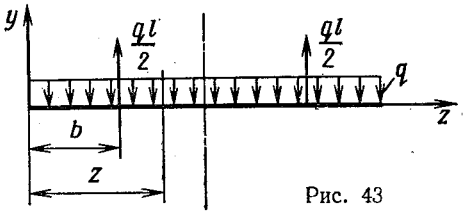


Рис. 43

циального уравнения оси изогнутого стержня (схема нагружения показана на рис. 43) $EIy'' = -\frac{qz^2}{2} + \frac{ql}{2}(z - b)$; с учетом граничных условий при $z = 0$ $y' = \theta_A = 0$; при $z = \frac{l}{2}$ $y' = 0$ следует $EIy' = -\frac{qz^3}{6} + \frac{ql}{4}(z - b)^2$ и $\frac{ql^3}{48} = \frac{ql}{4}\left(\frac{l}{2} - b\right)^2$, откуда $b = \frac{l}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $a = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

2.13. 1) $a = 0{,}586l$; 2) $a = 0{,}554l$. Прочность данной балки наибольшая, когда наибольшие по абсолютному значению моменты в середине пролета и над опорами одинаковы. Жесткость наибольшая (прогибы минимальны), когда перемещение крайних сечений равно перемещению среднего сечения балки.

2.14. $\delta = \alpha t l^2/2b$. Так как $\varepsilon = y/\rho$, $1/\rho = \varepsilon_{max}/b = \alpha t/b$. Для определения перемещения удобно воспользоваться интегралом Мора в виде $\delta = \int_l \mathcal{M}_1 \, d\theta$, где $\mathcal{M}_1$ — изгибающий момент от единичной нагрузки; $d\theta$ — взаимный угол поворота близлежащих сечений от заданного воздействия. В данном случае $\mathcal{M}_1 = 1 \cdot z$; $d\theta = \frac{dz}{\rho} = \frac{\alpha t \, dz}{b}$ (z отсчитываем от свободного конца балки справа налево). Таким образом, $\delta = \int_0^l 1z \frac{\alpha t \, dz}{b} = \frac{\alpha t l^2}{2b}$.

2.15. $l = 0{,}724l_1$, $\delta = 1{,}264$ мм. Стержень AB и балка CD равнопрочны при $l = 0{,}724l_1$ и $l = 0{,}276l_1$, но в первом случае напряжения меньше, поэтому этот вариант предпочтительнее.

2.16. $b = 9a$; условием оптимальности является равенство отношений абсолютных значений наибольшего растягивающего и сжимающего напряжений и пределов текучести при растяжении и сжатии. Следует иметь в виду, что нейтральная линия при изгибе проходит через центр тяжести сечения.

2.17. $a = 5{,}07$ мм; $d = 31{,}6$ мм; $b = 2{,}13$ мм, принимаем $a = 5$ мм; $d = 32$ мм; $b = 2$ мм.

2.18. $a = 39{,}7$ мм, принимаем $a = 40$ мм. Вследствие того, что материал по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, наиболее напряженным в данном случае оказывается среднее сечение между опорами, хотя в сечении над правой опорой изгибающий момент больше. Рациональное расположение балки — полкой вверх. Если балку повернуть полкой вниз, наиболее напряженным станет сечение над правой опорой, размер сечения определится неравенством $a \geqslant 43{,}7$ мм.

2.19. $P = \frac{9}{16} ql.$

2.20. а) $v_K = \frac{5}{36} \frac{ql^4}{EI_x}$; $\theta_B = -\frac{23}{72} \frac{ql^3}{EI_x}$;

б) $v_K = -\frac{53}{72} \frac{ql^4}{EI_x}$; $\theta_B = \frac{5}{8} \frac{ql^3}{EI_x}$; в) $v_K = -\frac{17}{12} \frac{ql^4}{EI_x}$; $\theta_B = -\frac{1}{8} \frac{ql^3}{EI_x}$;

г) $v_K = -\frac{1}{6} \frac{ql^4}{EI_x}$; $\theta_B = \frac{7}{24} \frac{ql^3}{EI_x}$.

Линейное перемещение считаем положительным, если оно направлено вверх; угловое перемещение положительно, если оно противоположно направлению вращения часовой стрелки.

2.21. а) $\delta_K = -\frac{5}{24} \frac{ql^4}{EI_x}$; б) $\theta_K = -\frac{1}{2} \frac{ql^3}{EI_x}$; в) $\delta_K = \frac{55}{24} \times \frac{ql^4}{EI_x}$; г) $\delta_K = \frac{7}{4} \frac{ql^4}{EI_x}$. За положительное направление линейного перемещения принято направление вправо и вверх, углового — против направления вращения часовой стрелки.

2.22. а) $\delta_г = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \frac{MR^2}{EI_x}$; $\delta_в = -\frac{MR^2}{EI_x}$; $\delta = 1{,}150 \frac{MR^2}{EI_x}$; б) $\delta_г = \frac{\pi - 1}{2} \frac{PR^3}{EI_x}$; в) $\theta = \left(\frac{3}{4} - \frac{\pi}{8}\right) \frac{PR^2}{EI_x}$; г) $\delta_в = -(\pi - 1{,}5) \times \frac{PR^3}{EI_x}$ (о знаках перемещений см. ответ к задаче 2.21).

2.23. $A = \frac{P^2 l^3}{6EI_x}$. $A = \frac{1}{2} Pv_C + \frac{1}{2} Pl\theta_B$, где v_C — смещение сечения C (см. рис. 2.23) по направлению силы P; θ_B — угол поворота сечения B по направлению момента Pl. При решении следует не забывать о том, что работа отдельной нагрузки может быть и положительной, и отрицательной.

2.24. Напряжения в обоих случаях равны нулю, наибольший прогиб балки на рис. 2.24,*а* $v = \frac{\alpha t}{h} \frac{l^2}{2}$, балки на рис. 2.24,*б*

$v = \frac{\alpha t}{h}\frac{l^2}{8}$. Для определения прогиба в формуле интеграла Мора $v = \int_l \frac{M_x M_1}{EI_x} dz$ учтем, что $\frac{M_x}{EI_x} = \frac{1}{\rho}$. Но $\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon}{y}$, $\varepsilon = \frac{\alpha t}{2}$; $y = \frac{h}{2}$, следовательно, $v = \int_l \frac{\alpha t}{h} M_1 dz$.

2.25. Форма оси изогнутого бруса при $b \leqslant \frac{l}{1+\sqrt{2}}$ показана на рис. 44, *а*, при $\frac{l}{2} \geqslant b \geqslant \frac{l}{1+\sqrt{2}}$ — на рис. 44, *б*. При $b \geqslant \frac{l}{2}$ равновесие бруса невозможно. Рассмотрим случай, изображенный

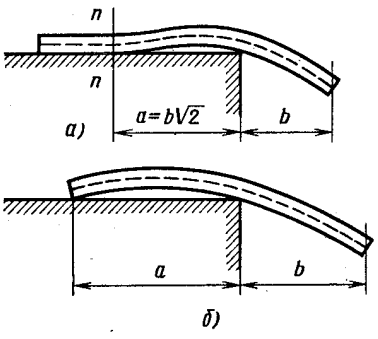


Рис. 44

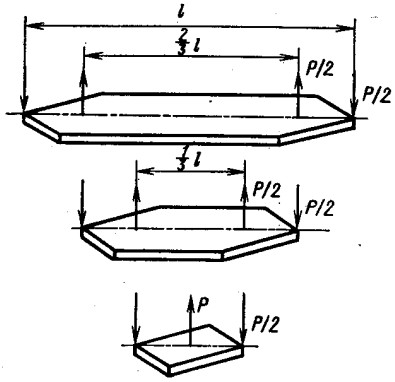


Рис. 45

на рис. 44, *а*. Эпюру изгибающих моментов нетрудно получить, если учесть, что в сечении *n*—*n* кривизна, а следовательно, и изгибающий момент, равны нулю. Размер *a* определяем из условия равенства нулю угла поворота в этом сечении: $a = b\sqrt{2}$; условие существования подобной формы изгиба имеет вид $b + b\sqrt{2} \leqslant l$.

2.26. $I_2 = 4I_1$; $\delta = \frac{2}{9}\frac{Pl^3}{EI_1} = 0{,}6$ мм. Соотношение моментов инерции определяем из условия равенства нулю угла поворота сечения, имеющего наибольшее перемещение, т. е. $\theta_B = 0$.

2.27. $a = 0{,}423l$. Для решения удобно воспользоваться дифференциальным уравнением изогнутой оси для правого пролета, взяв начало координат над средней опорой (реакция левой опоры равна нулю). В этом случае постоянные интегрирования в универсальном уравнении равны нулю, значение *a* определяем из условия равенства нулю прогиба над правой опорой.

2.28. $v = \frac{1}{32}\frac{Pl^3}{E\frac{Bh^3}{12}}$; схема нагружения каждой полосы показана на рис. 45; напряжения в поперечных сечениях вдоль рессоры постоянны. Легко показать, что напряженно-деформиро-

ванное состояние рессоры не отличается от напряженно-деформированного состояния балки постоянной толщины, имеющей в плане форму ромба $ADBC$ (см. рис. 2.28, *б*).

2.29. $T = 42{,}6$ кН.

2.30. $q_т = \frac{64}{27}\frac{\sigma_т b^3}{l^2}$; $q_{пр} = \frac{32}{9}\frac{\sigma_т b^3}{l^2}$; $z_1 = \frac{9}{10}l$; $z_2 = \frac{3}{4}l - \frac{3}{2}l\frac{1}{\sqrt{20}} = 0{,}415l$ (z_1 отсчитываем от правой опоры, z_2 — от левой).

2.31. $q_0 = 9{,}67\frac{\sigma_т a^3}{l^2}$, эпюра остаточных напряжений показана на рис. 46. Рекомендуется следующий порядок определения q_0:

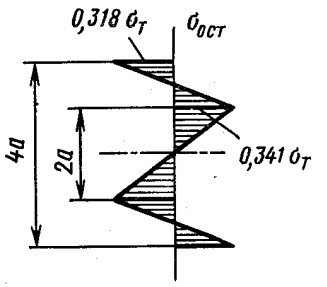


Рис. 46

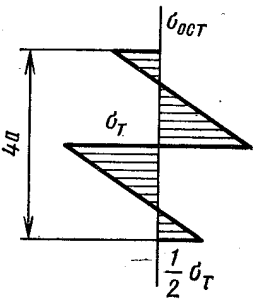


Рис. 47

изобразить эпюру фактических напряжений в наиболее нагруженном сечении; подсчитать внутренний момент $\mathcal{M}^*$, соответствующий этой эпюре; построить эпюру изгибающих моментов для заданной балки; приравнять наибольшее значение момента на эпюре вычисленному внутреннему моменту $\mathcal{M}^*$.

2.32. $q_т = 0{,}88\frac{\sigma_т a^3}{l^2}$; $q_{пр} = 1{,}5\frac{\sigma_т a^3}{l^2}$. Следует иметь в виду, что рама статически определимая, поэтому зависимость изгибающих моментов от нагрузки (эпюра $\mathcal{M}_{изг}$) постоянна при изменении q от нуля до предельного значения.

2.33. В сечении A остаточные напряжения равны нулю. Эпюра остаточных напряжений в сечении B изображена на рис. 47.

2.34. $R_0 = 76$ мм; $\alpha_0 = 235°$. Внутренний момент $\mathcal{M}$ и кривизна оси изогнутого бруса $\varkappa$ при упруго-пластическом изгибе связаны зависимостью $\mathcal{M} = \frac{1}{2}\mathcal{M}_т\left[3 - \left(\frac{\varkappa_т}{\varkappa}\right)^2\right]$, где $\mathcal{M}_т$ — момент, при котором возникают первые пластические деформации; $\varkappa_т$ — соответствующая этому моменту кривизна оси изогнутого бруса. Остаточная кривизна $\varkappa_{ост} = \varkappa - \frac{\varkappa_т}{2}\left[3 - \left(\frac{\varkappa_т}{\varkappa}\right)^2\right]$. $\varkappa_{ост}$ и $\varkappa_т$ известны, кривизна оси прутка на оправке $\varkappa$ определяется решением послед-

него уравнения. Угол охвата α_0 находим из условия $\pi\left(R+\frac{a}{2}\right)=\frac{\alpha_0}{\chi}$.

2.35. $v=\frac{7}{8}\varkappa_T l^2$. Расчетная формула $v=\int_l \varkappa \mathcal{M}_1\,dz$. Интеграл Мора вычисляем по способу Верещагина, эпюру кривизны $\varkappa$ строим на основе эпюры изгибающего момента и схематизированной зависимости $\mathcal{M}=\mathcal{M}(\varkappa)$. Момент $\mathcal{M}_1$ — функция изгибающих моментов, возникающих от действия единичной силы, приложенной на свободном конце. Эпюры $\varkappa$ и $\mathcal{M}_1$ показаны на рис. 48.

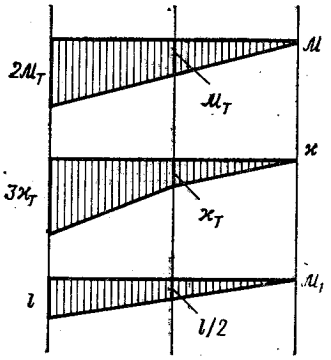


Рис. 48

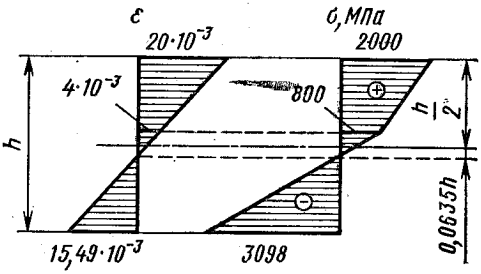


Рис. 49

2.36. $n_в=P_в/P=10{,}8$, где $P_в=\mathcal{M}_в/l$ — нагрузка, при которой резец разрушается; $\mathcal{M}_в$ — внутренний момент, соответствующий разрушению. В данном случае разрушение начинается, когда наибольшее растягивающее напряжение становится равным $\sigma_{в.р}$. Для определения $\mathcal{M}_в$ строим эпюру напряжений по сечению, учитывая, что вследствие справедливости гипотезы плоских сечений эпюра деформаций линейна (рис. 49). Положение нейтральной линии определяем из условия равенства нулю нормальной силы.

2.37. $n_т=1{,}25$; $n_в=2{,}9$. Пояснения см. в ответе к задаче 2.36. Эпюра деформаций и напряжений по наиболее нагруженному сечению в предельном состоянии показана на рис. 50.

2.38. а) $\sigma_{max}=\frac{24M}{a^3}$; $v_{max}=12\sqrt{5}\,\frac{Ml^2}{Ea^4}$.

б) $\sigma_{max}\approx 75$ МПа; $v_{max}\approx 6$ мм. Положение «опасной» точки и ее координаты определяем графически. Для этого следует поперечное сечение вычертить в масштабе.

2.39. В сечении A $\sigma_{max}=58$ МПа, в сечении B $\sigma_{max}=44$ МПа.

2.40. Для сечений типа а) $\sigma_{max}=\frac{|\mathcal{M}_x|+|\mathcal{M}_y|}{W_x}$, типа б) $\sigma_{max}=\frac{\sqrt{\mathcal{M}_x^2+\mathcal{M}_y^2}}{W_x}$. Эпюры величин, определяющих σ_{max} даны на рис. 51.

2.41 $\sigma_{max} = 0{,}572 \frac{P}{a^2}$.

2.42. $\sigma_{max} = 98{,}5$ МПа (сжатие). Эпюра напряжений в сечении показана на рис. 52.

2.43. $\sigma_{max} = 2{,}5 \frac{P}{b^2}$; $\theta = 30 \frac{P}{b^2 E}$.

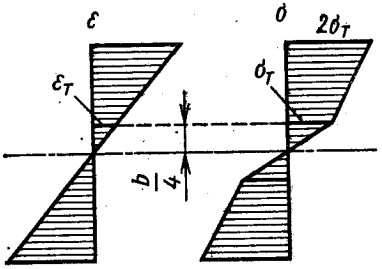


Рис. 50

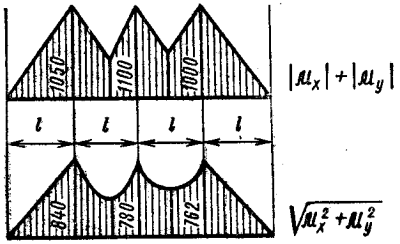


Рис. 51

2.44. $k = 0{,}4$. Уравнение, определяющее k, имеет вид $\frac{P}{(h-2kh)\,b} = \frac{P}{(h-kh)\,b} + \frac{Pkh \cdot 6}{2b\,(h-kh)^2}$ или, после некоторых преобразований, $2kh^2 - 5k^2h^2 = 0$.

2.45. Наличие вырезанного окна приводит к тому, что в ослабленном сечении труба изгибается и растягивается $\sigma_{max} = 365$ МПа. Для уменьшения напряжений нужно вырезать симметричное окно слева, в этом случае напряжения по сечению будут распределены равномерно, причем $\sigma = 298$ МПа.

2.46. $\rho = 100$ м. Так как при изгибе $\varepsilon = y/\rho$, то в данном случае $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = a/\rho$.

2.47. Напряжения в сечении у основания трубы складываются из напряжений сжатия от собственного веса и напряжений изгиба от ветровой нагрузки. Кирпичная кладка отлично сопротивляется сжатию и плохо — растяжению, поэтому, чем больше сжимающие напряжения от собственного веса, тем труба прочнее. Следовательно, более тяжелый кирпич предпочтительнее.

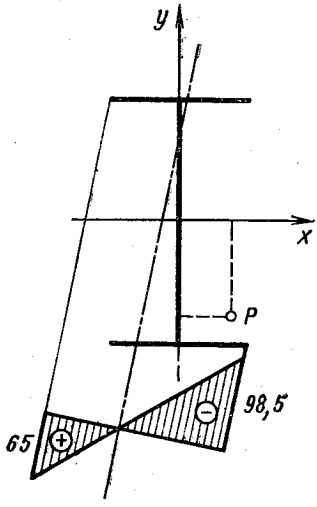


Рис. 52

2.48. В корпусе башни возникают напряжения сжатия от действия собственного веса и натяжения канатов. Боковая ветровая нагрузка вызывает изгиб башни. Так как бетон лучше сопротивляется сжатию, чем растяжению, желательно, чтобы напряжения

растяжения были как можно меньше, что и достигается натяжением канатов.

2.49. Эпюру см. на рис. 53, $v = 0$: $*$ — точки перегиба.

2.50. $x = 0{,}25l$. Коэффициент запаса наибольший, когда абсолютные значения изгибающих моментов в сечении над опорой и в сечении, где приложена сила P, равны между собой.

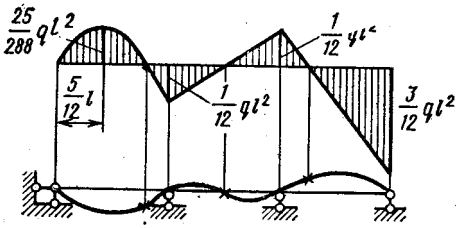


Рис. 53

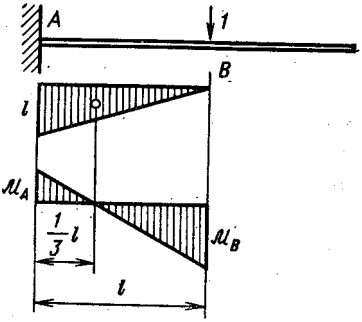


Рис. 54

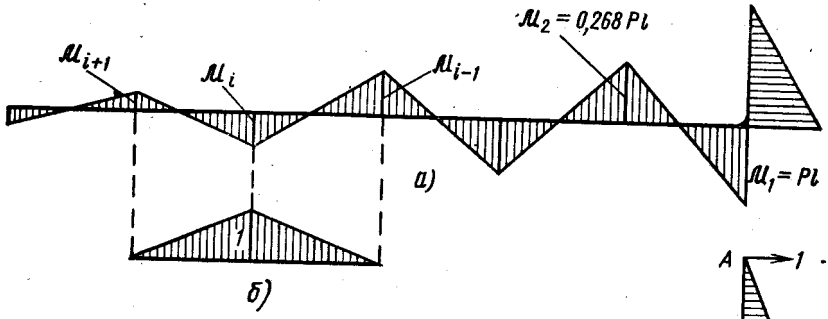
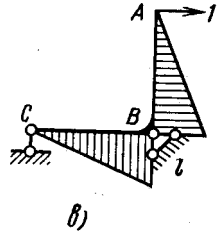


Рис. 55



2.51. Перемещение сечения B равно нулю. Для определения этого перемещения нужно «перемножить» эпюры, показанные на рис. 54. Очевидно, результат будет равен нулю, если $M_A = \frac{1}{2}|M_B|$.

2.52. $\delta = 0{,}622\frac{Pl^3}{EI}$. Эпюра изгибающих моментов, возникающих в сечениях конструкции, показана на рис. 55, *а*. Так как число пролетов бесконечно велико, то

$$\frac{|M_{i+1}|}{|M_i|} = \frac{|M_i|}{|M_{i-1}|} = \alpha. \qquad (1)$$

Найдем взаимный угол поворота сечений над i-й опорой, для чего «перемножим» эпюры на рис. 55, *а* и *б*. В результате получим $\mathcal{M}_i l \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}(\mathcal{M}_i + \mathcal{M}_{i+1}) l \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(\mathcal{M}_i + \mathcal{M}_{i-1}) l \frac{1}{3}$, откуда, с учетом (1), $\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0$. Зная α ($\alpha = 0{,}268$), строим эпюру моментов от заданной нагрузки, эпюру моментов от единичной силы (рис. 55, *в*) и находим перемещение δ.

2.53. При $q < \bar{q} = 384\Delta EI/l^4$ балка не касается опоры (рис. 56, *а*). При $q = \bar{q}$ балка касается опоры в среднем сечении, реакция опоры $R = 0$, изгибающий момент в этом сечении $\mathcal{M} = \bar{q}l^2/24$. При $\bar{q} < q < 3\bar{q}$ кривизна балки и изгибающий момент в среднем сечении уменьшаются до нуля, реакция R увеличивается до $R = ql/6$. При $q > 3\bar{q}$ балка «ложится» на опору (рис. 56, *б*). Расстояние от опоры до точки касания определяется зависимостью $z^* = \sqrt[4]{\frac{72\Delta EI}{q}}$.

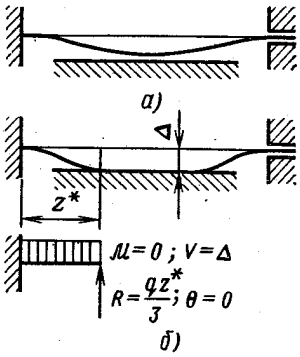


Рис. 56

2.54. $\sigma_м = -23{,}4$ МПа; $\sigma_{ст} = 33{,}1$ МПа. Из условий закрепления следует, что пластина при нагреве остается прямолинейной, поэтому удлинения составляющих ее частей должны быть одинаковы, т. е.

$$\alpha_м lt - \frac{Nl}{E_м b h_м} = \alpha_{ст} lt + \frac{Nl}{E_{ст} b h_{ст}},$$

где N — усилие, возникающее в стальной и медной частях биметалла (рис.57).

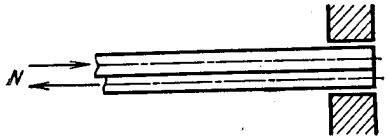


Рис. 57

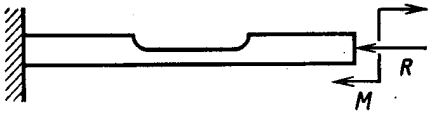


Рис. 58

2.55. Наибольшее напряжение сжатия на крайних участках $\sigma = 1{,}65\alpha tE$, в сечениях среднего участка $\sigma = 2{,}4\alpha tE$. Задача дважды статически неопределима. Эквивалентная система показана на рис. 58. Силу R и момент M определяем из уравнений

$$\alpha 3lt = \frac{R \cdot 2l}{Eh^2} + \frac{Rl}{E\frac{h^2}{2}}; \qquad \frac{Rh}{4}\frac{l}{E\frac{h^4}{96}} = \frac{M \cdot 2l}{E\frac{h^4}{12}} + \frac{Ml}{E\frac{h^4}{96}}.$$

2.56. $l = 55{,}1$ м; $P = 45$ кН. Схема нагружения приподнятой части трубы показана на рис. 59. Изгибающий момент в сечении A равен нулю, так как кривизна оси изогнутой трубы в этой точке равна нулю. Решать задачу удобно с помощью уравнения изогнутой оси $EIv = D + Cz + R\frac{z^3}{6} - \frac{qz^4}{24}$, содержащего три неизвестных: D, C, R и имеющего три граничных условия: $z = 0$, $v = 0$, $v' = 0$; $z = \frac{l}{2}$ $v' = 0$. Кроме того, при $z = \frac{l}{2}$ $v = h$; $R = \frac{ql}{2} - \frac{P}{2}$. С помощью последних двух условий определяем l и P.

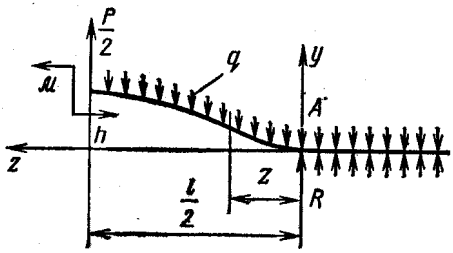


Рис. 59

2.57. а) $P_{пр} = \frac{3M_{пр}}{l}$; б) $P_{пр} = \frac{3M_{пр}}{l}$;

в) $P_{пр} = \frac{2M_{пр}}{l}$; г) $q_{пр} = 0{,}728\frac{M_{пр}}{l^2}$;

д) $q_{пр} = \frac{4M_{пр}}{l^2}$; е) $P_{пр} = \frac{2M_{пр}}{l}$.

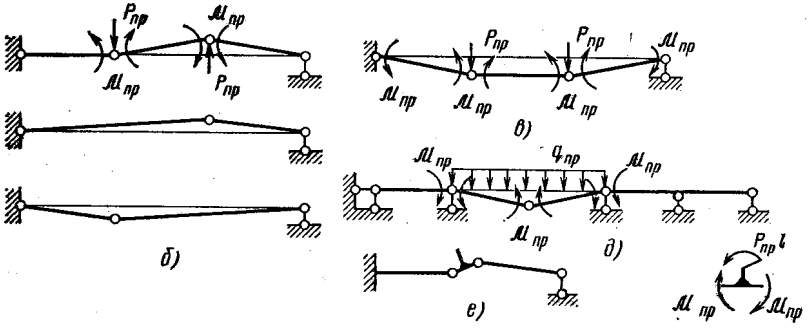


Рис. 60

Схемы превращения систем в механизмы для случаев *в*, *д* и *е* показаны на рис. 60. Там же изображены кинематически возможные варианты схем исчерпания несущей способности для случая *б*.

2.58. $n_т = 8{,}2$. Расчетная схема нагружения балки показана на рис. 61, $q = \gamma Fj/g = 490$ Н/м.

2.59. $z = 2l/3$, реакция опоры A равна нулю. В этом легко убедиться, взяв в качестве основной системы раму, заделанную одним концом. «Произведение» единичной эпюры на эпюру в состоянии «P» (рис. 62) в этом случае равно нулю.

2.60. $a = 0{,}061$ м. Решение начинаем с определения усилия, передаваемого через шарнир, в зависимости от a. Для этого выберем эквивалентную систему (рис. 63) и найдем $X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}$. В данном случае $\delta_{11} = \frac{1}{3EI}(a^3 + 6la^2)$; $\delta_{1P} = -\frac{Pal^2}{2EI}$; $X_1 = \frac{3}{2} \times \times \frac{Pl^2}{a^2 + 6al}$. Размер a определяем из условия $X_1 = Q$. После соответствующих преобразований получим уравнение $a^2 + 6la - \frac{3}{4} l^2 = 0$, откуда $a = l(-3 + 3{,}122) = 0{,}122l$.

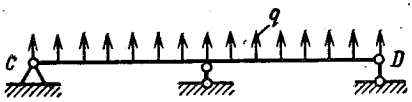


Рис. 61

2.61. Выбирая в качестве основной системы раму, «разрезанную» по шарниру, из условия симметрии определяем $X_1 = 0$ (рис. 64, *а*). Следовательно, изгибающие моменты в сечениях A и B равны по $\frac{Pa}{2}$. Единичная эпюра изгибающих моментов, соответствующая неизвестному силовому фактору X_2, показана на рис. 64, *б*. Результат «умножения» единичной эпюры на суммарную (рис. 64, *в*) должен быть равен нулю, что имеет место при $z_0 = l/3$. Следовательно, изгибающий момент в сечении C равен половине момента в сечении A, т. е. $M_C = Pa/4$.

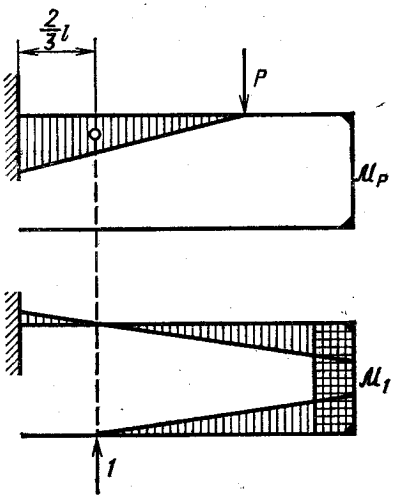


Рис. 62

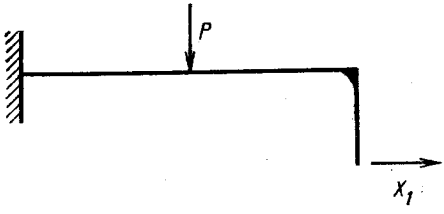


Рис. 63

2.62. $R = 3{,}97$ Н; $n_т = 13{,}7$. Следует иметь в виду, что реакция опоры A имеет горизонтальную и вертикальную составляющие. Эпюра изгибающих моментов в пружине и форма изогнутой оси после сборки показаны на рис. 65 (* — точка перегиба).

2.63. $\sigma_{max} = 70{,}1$ МПа. Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 66.

2.64. В кольце $\sigma_{max} = 56{,}4$ МПа, в тяге $\sigma = 98{,}1$ МПа. Для контроля промежуточных этапов решения задачи можно использовать следующие результаты: для эквивалентной системы, изобра-

женной на рис. 67, $\delta_{11}=\frac{4R^3}{EI_x}\left(\frac{3}{4}\pi-2\right)+\frac{8R}{EF}$; $\delta_{1P}=-\frac{PR^3}{EI_x}$; $X_1=0{,}616P$; наибольший изгибающий момент $\mathcal{M}_{\max}=0{,}177PR$ возникает в сечении при $\varphi=39{,}1°$.

2.65. Рассмотрим участок кольца с центральным углом $2\pi/n$ (рис. 68). Из условия равновесия следует $X_2=\frac{P}{2\sin\frac{\pi}{n}}$. Для

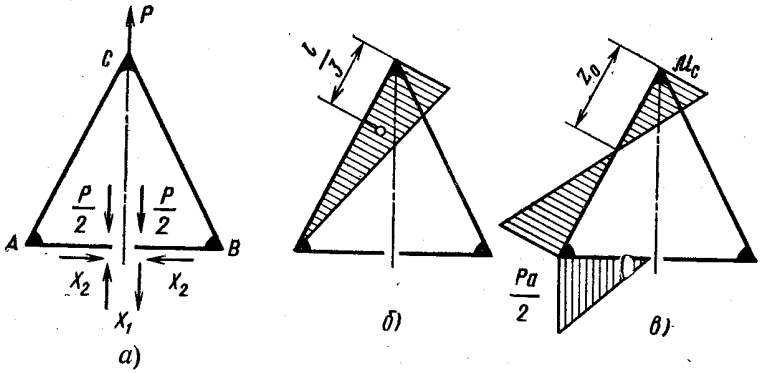


Рис. 64

определения моментов X_1 запишем каноническое уравнение метода сил $\delta_{11}X_1+\delta_{1P}=0$, решение которого имеет вид $X_1=-\frac{PR}{2}\times$ $\times\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}-\frac{n}{\pi}\right)$. Изгибающий момент в сечениях кольца равен

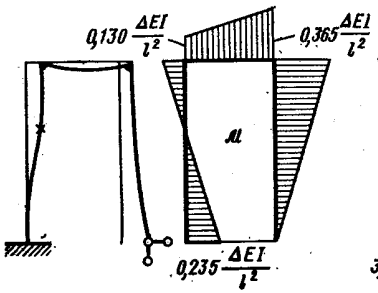


Рис. 65

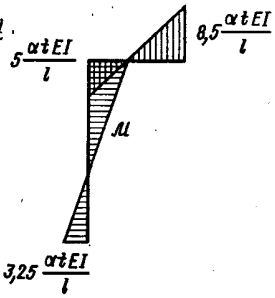


Рис. 66

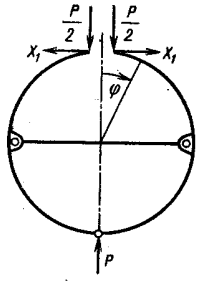


Рис. 67

$\mathcal{M}=\frac{PR}{2\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}\left(\sin\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n}\cos\varphi\right)$. При $\varphi=0$ напряжение $\sigma_{\max}=$ $=\frac{P}{2F\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{PR}{2W_x}\left(\frac{n}{\pi}-\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}\right)$. При большом n (см. условие

задачи) $P = p\dfrac{2\pi R}{n}$. Тогда $\sigma_{max} = \dfrac{p\pi R}{nF\sin\dfrac{\pi}{n}} + \dfrac{pR^2}{W_x}\left(1 - \dfrac{\pi}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}\right)$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi/n}{\sin\pi/n} = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{max} = \dfrac{pR}{F}$.

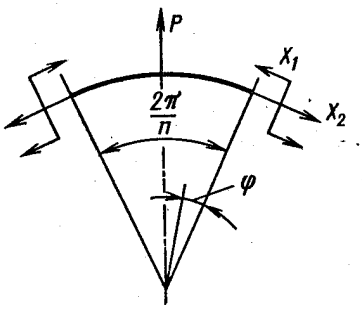


Рис. 68

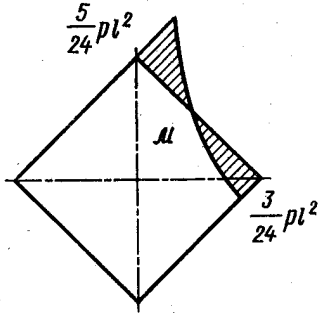


Рис. 69

При малом n в формуле для σ_{max} (с учетом того, что n может быть только целым положительным числом) второе слагаемое относится к первому как $R : h$, где h — высота поперечного сечения кольца в его плоскости. Итак, кольцо малой кривизны находится в условиях изгиба, если n мало, и в условиях растяжения при большом значении числа n.

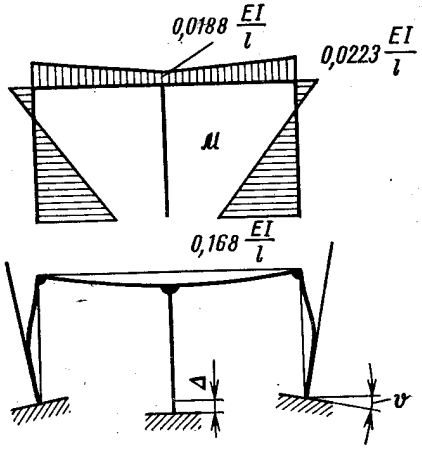


Рис. 70

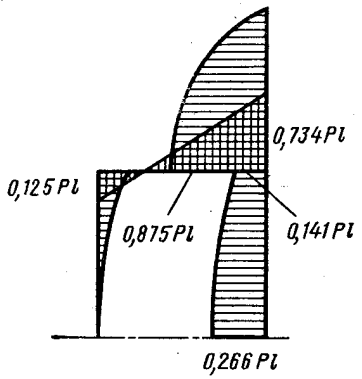


Рис. 71

2.66. Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 69; $p = \dfrac{q}{g}\dfrac{\omega^2 l}{2}$.

2.67. $\sigma_{max} = 1680$ МПа, форма изогнутой оси и эпюра изгибающих моментов даны на рис. 70.

2.68. См. рис. 71.

2.69. $\varepsilon = 1{,}601 \cdot 10^{-3}$. Схема нагружения балки показана на рис. 72, там же изображена эпюра изгибающих моментов, соответствующая оптимальным условиям нагружения. Силу X определяем из условия равенства экстремального значения момента моменту в сечении над опорой:

$$\frac{1}{2q}\left(ql - \frac{X}{2}\right)^2 = \frac{ql^2}{2} - \left(ql - \frac{X}{2}\right)l.$$

Усилие в тягах $N = \dfrac{X}{2 \sin 15^\circ} = E\varepsilon F$, откуда $\varepsilon = \dfrac{X}{2EF \sin 15^\circ}$.

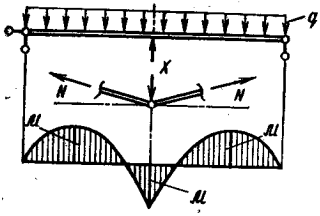


Рис. 72

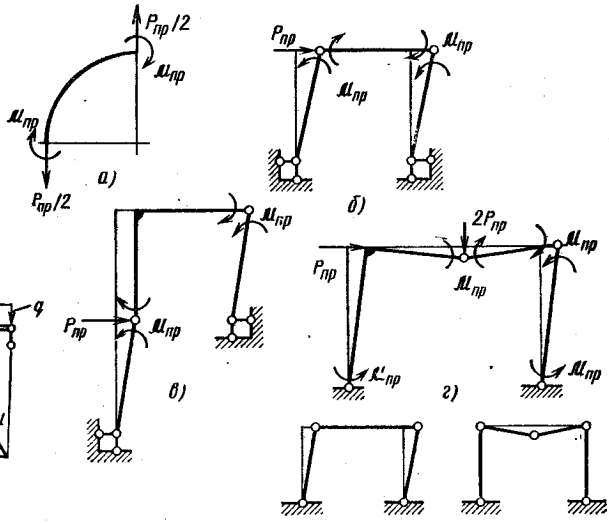


Рис. 73

2.70. *а)* $P_{\text{пр}} = \dfrac{4\mathscr{M}_{\text{пр}}}{R}$; *б)* $P_{\text{пр}} = \dfrac{2\mathscr{M}_{\text{пр}}}{l}$;

в) $P_{\text{пр}} = \dfrac{2\mathscr{M}_{\text{пр}}}{l}$; *г)* $P_{\text{пр}} = \dfrac{8}{3}\dfrac{\mathscr{M}_{\text{пр}}}{l}$.

Схемы исчерпания несущей способности рам показаны на рис. 73. Для случая *г* изображены все кинематически возможные варианты образования механизма.

3.01. $\sigma_n = 25{,}6$; $\tau_n = 50{,}2$.

3.02. а) одноосное напряженное состояние; б) двухосное; в) двухосное смешанное напряженное состояние чистый сдвиг; г) одноосное сжатие; д) напряженное состояние, при котором изменение объема равно нулю.

3.03. а) $\sigma_1 = 56$; $\sigma_2 = 20{,}4$; $\sigma_3 = -46{,}4$; б) $\sigma_1 = 40$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 10$; в) $\sigma_1 = 124{,}4$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -84{,}4$; г) $\sigma_1 = 140$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Направления первых главных напряжений σ_1 для случаев а и б показаны на рис. 74 (направления OA). В случае г направление второго главного напряжения σ_2 неопределенно — любая площадка, перпендикулярная первой главной, является второй главной.

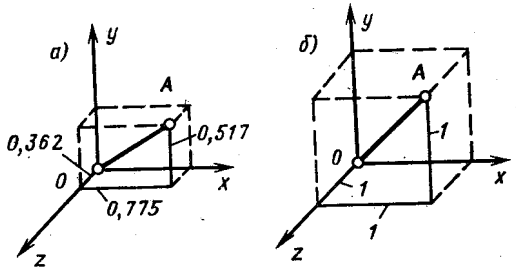


Рис. 74

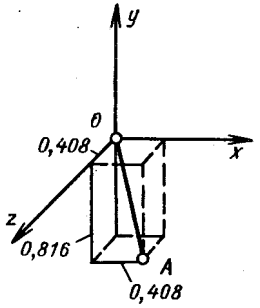


Рис. 75

3.04. $\sigma_y = 10$. Площадка, свободная от напряжений, в данном случае является второй главной. Вектор единичной нормали к этой площадке изображен на рис. 75 (направление OA).

3.05. *а*) $\sigma_1 = 94{,}7$; $\sigma_2 = 50$; $\sigma_3 = 5{,}3$; $\alpha = 31{,}7°$; *б*) $\sigma_1 = 50$; $\sigma_2 = 20$, $\sigma_3 = -80$; $\alpha = 26{,}6°$; *в*) $\sigma_1 = 50$; $\sigma_2 = -50$; $\sigma_3 = -80$; $\alpha = 45°$; *г*) $\sigma_1 = 100$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$; $\alpha = 30°$. Положение главных площадок и круговые диаграммы Мора показаны на рис. 76.

3.06. а) $\sigma_\alpha = 15$; $\tau_\alpha = 8{,}66$; б) $\sigma_\alpha = 26$; $\tau_\alpha = 15$; в) $\sigma_\alpha = -40$; $\tau_\alpha = 0$; г) $\sigma_\alpha = 10$; $\tau_\alpha = 0$. Графическое решение для случаев *а* и *б* показано на рис. 77.

3.07. См. рис. 78.

3.08. *а*) 80; *б*) 100; *в*) 100. Положение одной из площадок и графическое решение показаны на рис. 79, вторая площадка с τ_{max} перпендикулярна заштрихованной. Элементарные кубики на рис. 3.06 и рис. 79 ориентированы одинаково.

3.09. $\varepsilon_u = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha$. Решение легко получить, воспользовавшись круговой диаграммой деформаций (см.рис. 80).

3.10. $\varepsilon_1 = 1{,}424 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_2 = 0{,}476 \cdot 10^{-3}$; $\alpha = 9{,}2°$. Аналитические зависимости удобно получить с помощью следующего графического построения *. На произвольной горизонтальной оси (рис. 81) от точки O_1 отложим в масштабе величины ε_u, ε_t, ε_v. Через полученные точки проводим вертикали. Из произвольной точки B на вертикали t

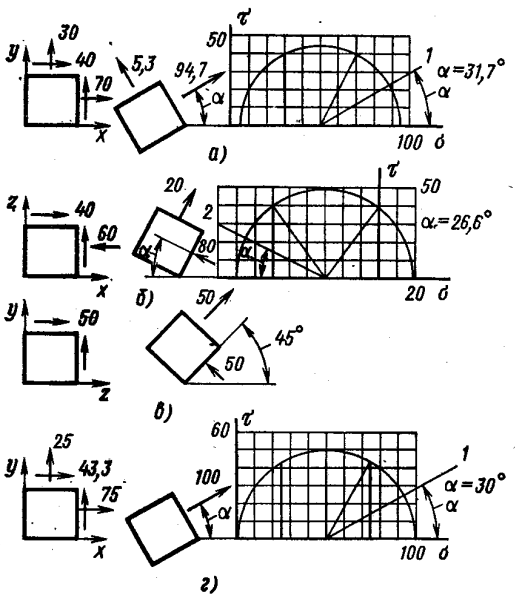


Рис. 76

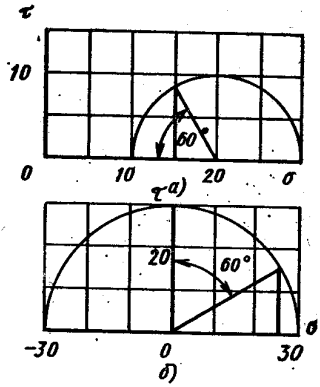


Рис. 77

проводим прямые под углом 45° к вертикали t до пересечения с вертикалями u и v (точки A и C соответственно). На отрезке прямой AC как на диаметре строим окружность. Центр этой

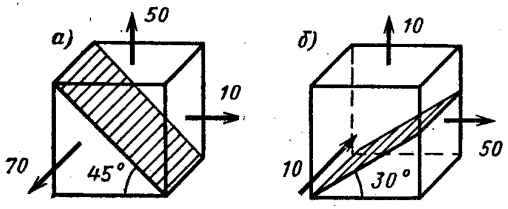


Рис. 78

окружности определяет положение оси ε диаграммы деформаций, вертикаль, проходящая через точку O_1, является осью половин угловых деформаций. Отрезки 01 и 02 определяют главные деформации в выбранном масштабе. Угол $1DC$ равен

* С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. Теория упругости. М., Наука, 1975, с.45

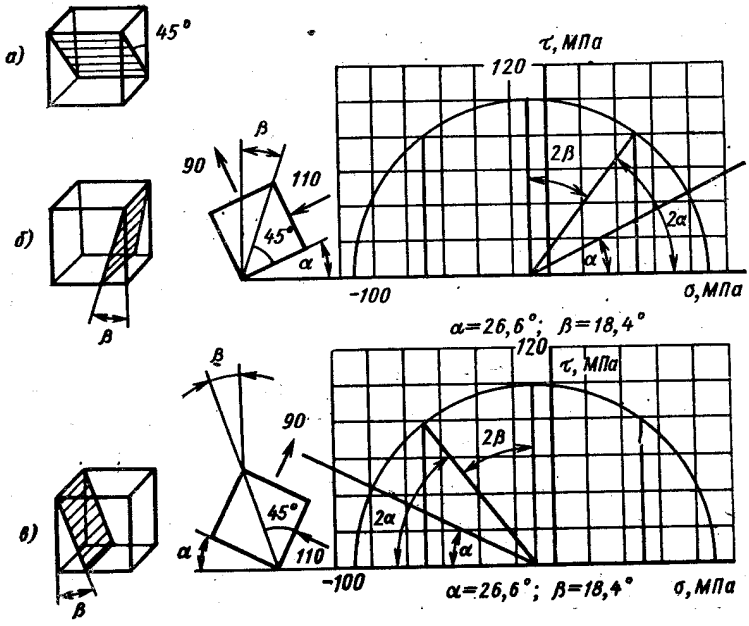


Рис. 79

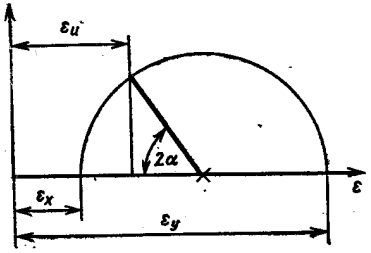


Рис. 80

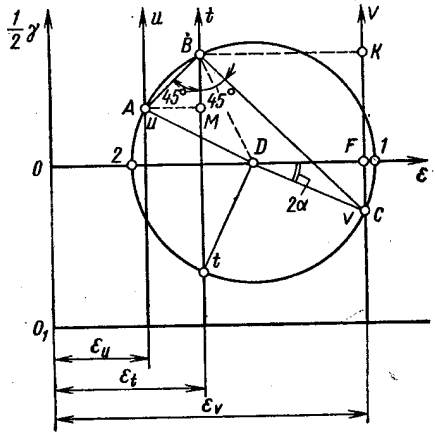


Рис. 81

удвоенному углу между направлением v и направлением первой главной деформации. Очевидно (см. рис. 81),

$$AB = (\varepsilon_t - \varepsilon_u)\sqrt{2}; \quad BC = (\varepsilon_v - \varepsilon_t)\sqrt{2};$$

$$AC = \sqrt{2}\sqrt{(\varepsilon_t - \varepsilon_u)^2 + (\varepsilon_v - \varepsilon_t)^2}; \quad OD = \frac{1}{2}(\varepsilon_v + \varepsilon_u);$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_u + \varepsilon_v}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\varepsilon_t - \varepsilon_u)^2 + (\varepsilon_v - \varepsilon_t)^2}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{FC}{FD};$$

$$FC = \frac{1}{2}(KC - MB); \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\varepsilon_v - 2\varepsilon_t + \varepsilon_u}{\varepsilon_v - \varepsilon_u}.$$

3.11. $\varepsilon_x = 3y^2$; $\varepsilon_y = 0$; $\varepsilon_z = 2z$; $\gamma_{xy} = 6xy + 2z$; $\gamma_{yz} = x$; $\gamma_{zx} = -y$; $\Delta = 3y^2 + 2z$.

3.12. $\gamma_{max} = 6 \cdot 10^{-3}$. Графическое решение дано на рис. 82.

3.13. $\sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_1$.

3.14. $\sigma_u = 35{,}2$ МПа; $\sigma_v = -149{,}5$ МПа; $\sigma_y = 0$ (y — ось, перпендикулярная поверхности стержня).

3.15. $\sigma_z = 57{,}7$ МПа; $\sigma_t = 42{,}3$ МПа. На поверхности цилиндра напряжение $\sigma_r = -p$.

3.16. $M = 125{,}7$ Н·м. Главные напряжения в точке поверхности валика равны: $\sigma_1 = \tau - p$; $\sigma_2 = -p$; $\sigma_3 = -\tau - p$. Направление u совпадает с направлением первого главного напряжения, деформация в этом направлении $\varepsilon_u = \frac{1}{E}[\tau - p + \mu \times (\tau + 2p)]$. Из последнего уравнения определяем τ, а затем крутящий момент.

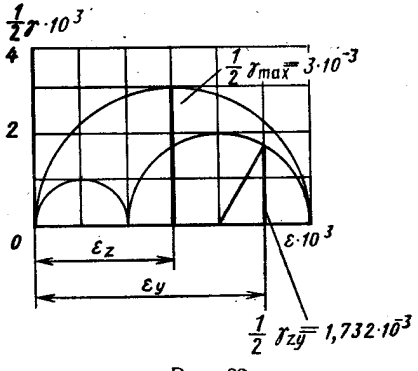


Рис. 82

3.17. Изменение объема Δ наибольшее в случае в.

а) $\Delta = -0{,}4\sigma_0/E$; б) $\Delta = -0{,}52\sigma_0/E$; в) $\Delta = -0{,}743\sigma_0/E$.

3.18. $p = \frac{\mu}{1-\mu}\frac{P}{F}$. Чтобы изменение объема можно было вычислять по формуле $\Delta V = \Delta lF$, поперечные деформации $\varepsilon_x = \varepsilon_y$ должны быть равны нулю.

3.19. См. рис. 83. Расчетные формулы в данном случае имеют вид $\sigma_i = 2p$; $\varepsilon_i = -2\varepsilon_t$.

3.20. $\sigma_1 = \sigma_т\left(1 + \frac{\alpha}{f}\right)\left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{\frac{2f}{\alpha}}\right] = 1{,}873\left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{2{,}292}\right]\sigma_т$;

$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_{пр} = \left(1 + \frac{f}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha}{2f}} = 0{,}717.$

Двумя соседними поперечными сечениями вырежем элемент проволоки. Силы, действующие на элемент, показаны на рис. 84, *а*. Условие равновесия имеет вид

$$\sigma \frac{\pi D^2}{4} = (\sigma + d\sigma)\frac{\pi}{4}(D + 2\alpha\, dz)^2 + p\left[\frac{\pi (D + 2\alpha\, dz)^2}{4} - \frac{\pi D^2}{4}\right] + p f \pi D\, dz.$$

или, после преобразования, без учета величин высшего порядка малости

$$\frac{d\sigma}{dz} + \frac{4\alpha}{D}\left(\sigma + p + \frac{f}{\alpha}p\right) = 0, \quad \text{где} \quad D = D_1 + 2\alpha z.$$

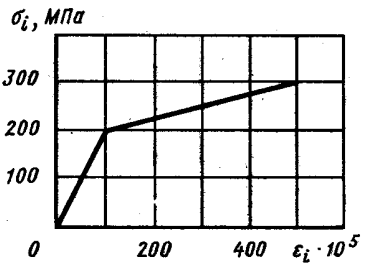


Рис. 83

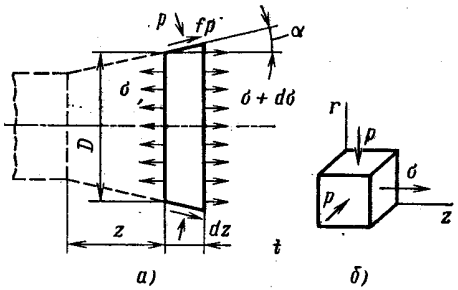


Рис. 84

Напряженное состояние в точках z-го сечения изображено на рис. 84, *б*. Интенсивность напряжений $\sigma_i = \sigma + p$. Дифференциальное уравнение равновесия с учетом условия текучести $\sigma_i = \sigma + p = \sigma_т$ приводится к виду

$$\frac{d\sigma}{\frac{f}{\alpha}\sigma - \left(1 + \frac{f}{\alpha}\right)\sigma_т} = \frac{4\alpha\, dz}{D_1 + 2\alpha z}.$$

Выполняя интегрирование, получим

$$\frac{f}{\alpha}\sigma - \left(1 + \frac{f}{\alpha}\right)\sigma_т = C(D_1 + 2\alpha z)^{\frac{2f}{\alpha}}.$$

Из условия: при $D = D_2$ напряжение $\sigma = 0$ найдем C. Окончательно

$$\sigma_1 = \sigma_т\left(1 + \frac{\alpha}{f}\right)\left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{\frac{2f}{\alpha}}\right].$$

Предельное значение D_1/D_2 соответствует возникновению пластических деформаций на выходе из фильеры ($\sigma_1 = \sigma_т$).

4.01. См. рис. 85.

4.02. Окружность превращается в эллипс с полуосями $a = (1 + \varepsilon)\frac{d}{2}$; $b = (1 - \varepsilon)\frac{d}{2}$, где $\varepsilon = \frac{\tau(1+\mu)}{E}$; τ — касательное напряжение в поперечном сечении трубки. Оси эллипса наклонены под углом 45° к образующей цилиндра.

4.03. Датчик наклеивается на поверхность вала под углом 45° к образующей. Приращение крутящего момента $\Delta\mathcal{M}_к$ с приращением показания датчика Δn связано зависимостью $\Delta\mathcal{M}_к = k\Delta n \frac{E}{1+\mu}\frac{\pi d^3}{16}$, где k — цена деления измерителя деформации.

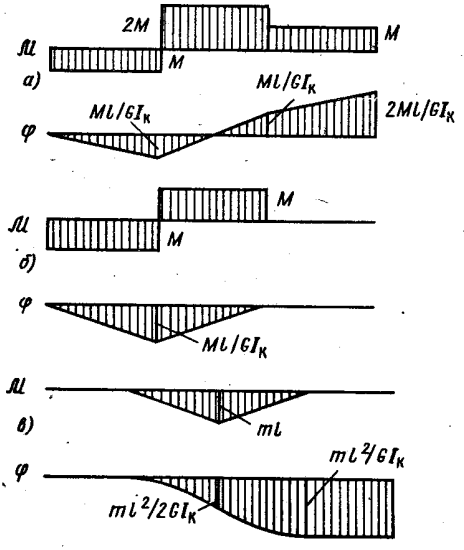


Рис. 85

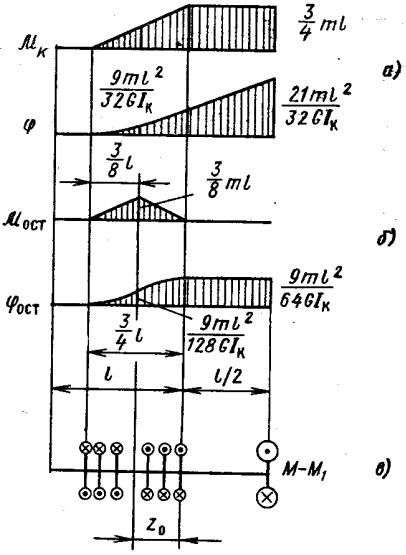


Рис. 86

4.04. Тонкостенная труба.

Отношение площадей равнопрочных брусьев $F_2 : F_1 : F_4 : F_3 = 3{,}33 : 2{,}71 : 1{,}08 : 1{,}0$; брусьев равной жесткости $F_2 : F_1 : F_4 : F_3 = 3{,}36 : 3{,}16 : 1{,}13 : 1{,}0$.

4.05. Прочность замкнутого профиля в 30 раз, а жесткость в 300 раз больше.

4.06. Тонкостенные открытые профили.

4.07. $T = 122{,}5$ кН.

4.08. $M^* = ml$. Эпюры $\mathcal{M}_к$, φ и $\mathcal{M}_{ост}$, $\varphi_{ост}$ даны на рис. 86, *а*, *б*. На рис. 86, *в* показана схема нагружения стержня, предварительно скрученного моментом M и разгруженного до значения внешнего

момента, равного $M - M_1$. При разгрузке (уменьшении внешнего момента) возникает зона обратного проскальзывания, длина которой обозначена z_0. При полной разгрузке $M_1 = M$.

4.09. $\mathcal{M}_{т1} : \mathcal{M}_{т2} : \mathcal{M}_{т3} = 1{,}356 : 0{,}837 : 1{,}0$; $\mathcal{M}_{пр\,1} : \mathcal{M}_{пр\,2} : \mathcal{M}_{пр\,3} = 1{,}13 : 0{,}884 : 1{,}0$.

4.10. Эпюры напряжений после заневоливания (*а*) и в рабочих условиях (*б*) показаны на рис. 87. $n_т = 1{,}37$; $n_в = 1{,}41$; $\varphi_0 = 1{,}377$ рад; $\varphi_1 = 0{,}786$ рад.

4.11. $\mathcal{M}_т = \mathcal{M}_{пр} = 1570$ Н·м. Произведение $\tau h = \text{const}$, поэтому, когда наибольшее напряжение достигает значения $\tau_т$, дальнейшее увеличение момента становится невозможным.

4.12. $\Delta D = 0{,}05$ мм (уменьшение); $\varphi = 1{,}5$ рад. Распределение напряжений в данном случае не зависит от свойств материала. Зная

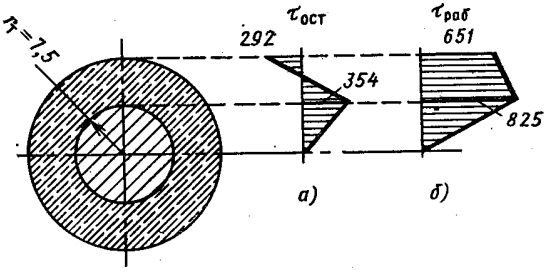


Рис. 87

напряжения, определяем σ_i, а затем, по зависимостям теории малых упруго-пластических деформаций и диаграмме деформирования материала, вычисляем окружную деформацию ε_t и угол сдвига γ_{zt}. С помощью геометрических соотношений $\Delta D = \varepsilon_т D$, $\varphi = \frac{2\gamma_{zt} l}{D}$ вычисляем изменение диаметра ΔD и угол закручивания φ.

4.13. $n_в = 1{,}95$. Так как наибольшее напряжение не пропорционально нагрузке, коэффициент запаса в данном случае логично определять как отношение момента $\mathcal{M}_в$, при котором происходит разрушение, к рабочему моменту $\mathcal{M}$. Для определения $\mathcal{M}_в$ строим эпюру углов сдвига γ по сечению (вследствие гипотезы о неискривляемости радиусов эта эпюра линейна, $\gamma_{max} = 5 \cdot 10^{-3}$), по эпюре γ и диаграмме сдвига материала строим эпюру τ (рис. 88). Момент полученных таким образом касательных сил и есть $\mathcal{M}_в$. Можно показать, что $\mathcal{M}_в = 2\pi I_y$, где I_y — момент инерции площади эпюры касательных напряжений относительно оси y.

Для тонкостенной трубки коэффициент запаса по разрушению $n_в = \frac{\tau_в}{\tau}$, где $\tau = \frac{\mathcal{M}}{\frac{\pi D^2 h}{2}}$; $\tau_в = \frac{\mathcal{M}_в}{\frac{\pi D^2 h}{2}}$.

4.14. $\mathcal{M} = 218$ Н·м; $p = 145{,}1$ МПа; $\varphi = 0{,}1039$ рад; $\Delta l = 0$. Напряженное состояние материала трубки показано на рис. 89,

$\tau = \frac{2\mathscr{M}}{\pi D^2 h} = 1{,}194p$. По теории малых упруго-пластических деформаций $\sigma_i = 2{,}07p$. Приравнивая σ_i заданному значению, $\sigma_i = 300$ МПа, определяем $\mathscr{M}$ и p. По формулам теории малых упруго-пластических деформаций находим ε_z и γ_{zt}, соответствующие напряжению 300 МПа, а затем φ и Δl.

4.15. $\alpha = 2$; эпюры $\mathscr{M}_к$ и φ даны на рис. 90; $n_т = 1{,}9$; $\varphi_{max} = 0{,}0216$ рад. Напомним, что участки бруса равнопрочны, если они имеют одинаковые коэффициенты запаса. Решение рационально начать с построения эпюры внутренних моментов, которые, по условию, должны быть одинаковы по абсолютной величине на всех участках. А так как разрывы функции $\mathscr{M}_к$ в сечениях, где приложены внешние моменты, равны M, то $\mathscr{M}_к = M/2$. Параметр α

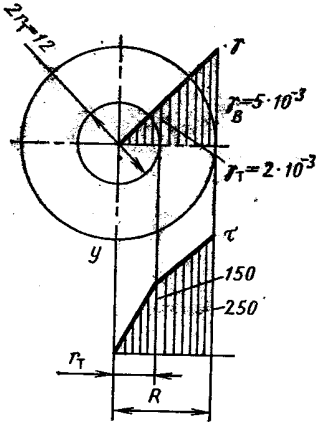


Рис. 88

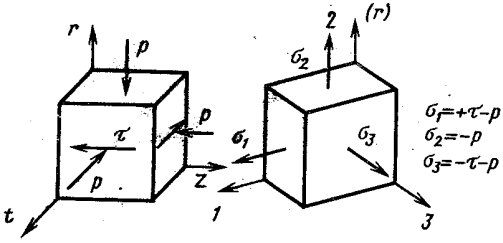


Рис. 89

определяем из условия равенства нулю взаимного угла поворота торцовых сечений бруса.

4.16. $M_C = \frac{3}{4}M$; $m = \frac{M}{8l}$, эпюры показаны на рис. 91.

4.17. $z_0 = \frac{l}{3}$. Прочность трубки наибольшая, когда крутящие моменты во всех ее сечениях по абсолютной величине одинаковы.

4.18. $\mathscr{M}_{ост} = \frac{I_{к.т}}{I_{к.в} + I_{к.т}} M$, где $I_{к.т}$ — геометрический фактор жесткости при кручении трубки; $I_{к.в}$ — то же, для валика. $D/d = 1{,}357$. Коэффициент запаса по текучести системы наибольший, когда максимальные напряжения в валике и трубке одинаковые.

4.19. $M_A = \frac{M}{3} + \frac{\Delta}{a}\frac{GI_к}{3b}$; $R_C = R_D = \frac{M}{3b} - \frac{\Delta}{a}\frac{GI_к}{6b^2}$. Графики этих зависимостей показаны на рис. 92.

4.20. $M_A = \frac{M}{1 + \frac{2b^2 lEF}{LGI_к}}$; при $L \to 0$ $M_A \to 0$; при $L \to \infty$ $M_A \to M$.

4.21. $\varphi_0 = \dfrac{Ml\left(1-\dfrac{d}{D}\right)}{G\left(I_{к.в}+\dfrac{d}{D}I_{к.т}\right)} = 0{,}015$ рад,

где $I_{к.в}$ — геометрический фактор жесткости валика при кручении; $I_{к.т}$ — то же, для трубки.

Момент $\mathcal{M}_0$, скручивающий валик и трубку после сборки, определяем из условия совместности деформации $\dfrac{\mathcal{M}_0 l}{GI_{к.в}} + \dfrac{\mathcal{M}_0 l}{GI_{к.т}} = \varphi_0$. Обозначим дополнительные внутренние моменты в валике и

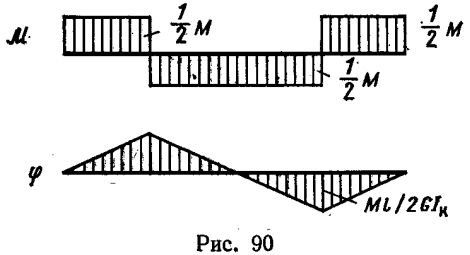


Рис. 90

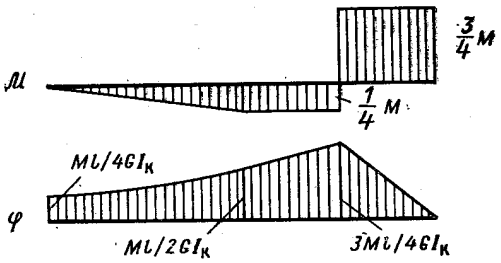


Рис. 91

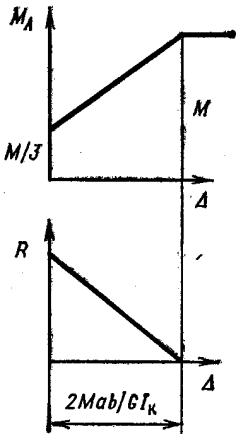


Рис. 92

трубке, вызванные действием внешнего момента M, $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ соответственно. Тогда $\dfrac{\mathcal{M}_1 l}{GI_{к.в}} = \dfrac{\mathcal{M}_2 l}{GI_{к.т}}$; $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = M$. Крутящий момент в сечениях валика в рабочем состоянии равен $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_0$ в трубке $\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_0$.

4.22. $A = \dfrac{7}{3}\dfrac{M^2 l}{GI_к}$; $A = \dfrac{1}{2}M\varphi_B + \dfrac{1}{2}3M\varphi_C$, где φ_B — угол поворота сечения B по направлению момента M; φ_C — угол поворота сечения C по направлению момента $3M$. При вычислении работы следует помнить о том, что она может быть как положительной, так и отрицательной.

4.23. $M = 7{,}85$ Н·м. Эпюры крутящих моментов и углов поворота сечений даны на рис. 93.

4.24. $M_{пр} = \tau_т \dfrac{\pi d^3}{6}$. Эпюры напряжений даны на рис. 94.

4.25. Эпюры моментов и углов поворота даны на рис. 95. Условие совместности деформаций стержней AB и CD имеет вид

$\frac{(M-Rb)\,l}{GI_к} = \frac{Rb2l}{GI_к}$, где R — сила взаимодействия рычагов в точке контакта E.

4.26. $n_т = 1{,}25$; $n_в = 1{,}7$. Схемы нагружения трубки и пружины показаны на рис. 96. Момент взаимодействия M_B определяем из условия равенства углов поворота сечения B трубки и сечения B

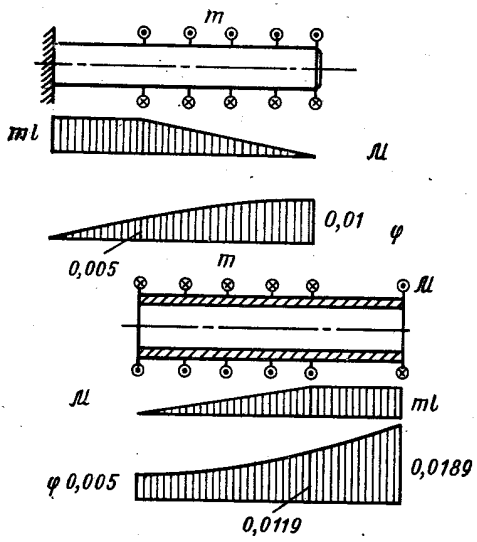


Рис. 93

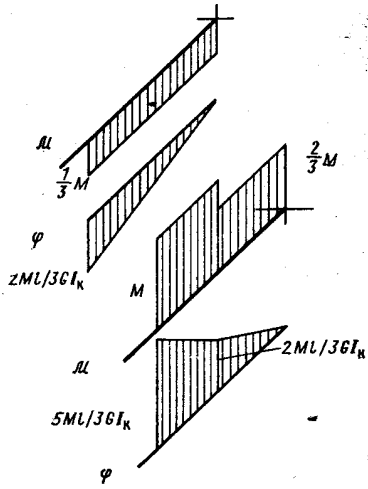


Рис. 95

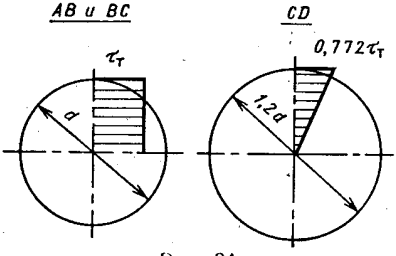


Рис. 94

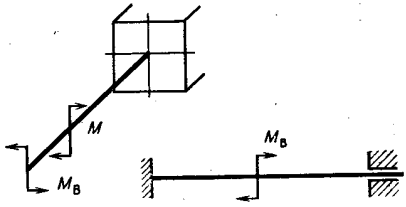


Рис. 96

пружины (рис. 4.23): $\frac{M2a}{GI_к} - \frac{M_B 3a}{GI_к} = \theta_B$. Пружина представляет собой статически неопределимую балку. Раскрывая неопределимость, найдем $\theta_B = \frac{M_B l}{8EI_x}$. Решение уравнения совместности перемещений дает $M_B = 0{,}399M$. Первые пластические деформации возникают в пружине. Для определения коэффициента запаса по предельной нагрузке исследуем два возможных варианта исчерпания несущей способности: а) «течет» трубка по всей длине; б) «течет» трубка на участке, примыкающем к заделке; пружина — в местах крепления к трубке. Реальным оказывается вариант б.

5.01. $T = \frac{P}{2\alpha}$. Возможное приращение перемещения точки приложения силы P равно δa, силы T δw (рис. 97). Работа внешних сил на возможных приращениях перемещений $P\delta a - T\delta w = 0$. Выразим a и w через параметр α: перемещение $a = l\alpha$; перемещение $w = \frac{2l}{\cos\alpha} - 2l = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha} 2l \approx l\alpha^2$. Следовательно: $\delta a = l\delta\alpha$; $\delta w = 2l\alpha\delta\alpha$. Подставив δa и δw в уравнение принципа возможных перемещений, получим условие равновесия.

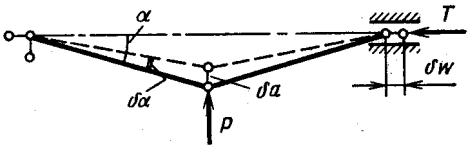


Рис. 97

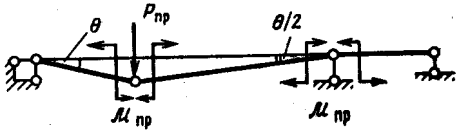


Рис. 98

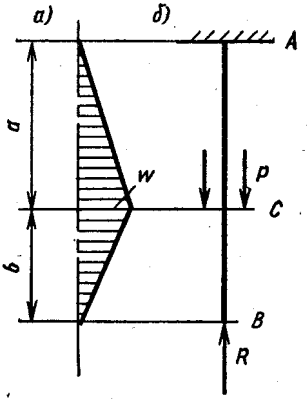


Рис. 99

5.02. $P_{пр} = 2M_{пр}/l$. Возможные перемещения сечений балки в предельном состоянии показаны на рис. 98. Уравнение принципа возможных перемещений имеет вид $P_{пр}\theta l = M_{пр}\theta + 2M_{пр}\frac{\theta}{2}$.

5.03. а) $w = \frac{P}{EF}\frac{ab}{a+b}$. На основе условий закрепления и схемы нагружения рисуем вид эпюры перемещений (рис. 99, *а*). Деформация на участке AC равна w/a, на участке CB — w/b. Потенциальная энергия деформации $U = \int_l \frac{1}{2}\varepsilon^2 EF dz$ в данном случае $U = \frac{1}{2}w^2 EF\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$. По формуле Лагранжа $P = \frac{\partial U}{\partial w}$.

б) $R - P\frac{a}{a+b}$. В соответствии со схемой нагружения, показанной на рис. 99, *б*, $U = \frac{R^2 b}{2EF} + \frac{(P-R)^2 a}{2EF}$. По формуле Кастильяно $w = \frac{\partial U}{\partial R}$. В данном случае перемещение сечения, в котором приложена сила R, равно нулю, поэтому $\frac{\partial U}{\partial R} = 0$.

5.04. *а*) $f = \dfrac{Pl^3}{\frac{\pi^4}{2} EI_x} = \dfrac{Pl^3}{48{,}7EI_x}$ $\left(\text{точное значение } \dfrac{Pl^3}{48EI_x}\right)$;

б) $f = 0{,}01307 \dfrac{ql^4}{EI_x}$ $\left(\text{точное значение } 0{,}01302 \dfrac{ql^4}{EI_x}\right)$. Вариационное уравнение Лагранжа $\delta(A - U) = 0$, где A — работа внешних сил; U — потенциальная энергия деформации. Так как $U = \int_l \frac{1}{2} EI_x (y'')^2 dz$, в данной задаче в обоих случаях $U = f^2 \dfrac{\pi^4 EI_x}{4l^3}$. Работа внешних сил в случае *а* равна $A = Pf$, в случае *б* $A = \int_0^l qf \sin \dfrac{\pi z}{l} dz = qf \dfrac{2l}{\pi}$. Полная энергия системы $\Pi = A - U$ зависит от f. Условием минимума ее является $\dfrac{d\Pi}{df} = 0$. Интересно отметить, что, как правило, перемещения, вычисленные

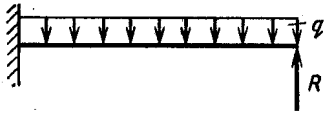


Рис. 100

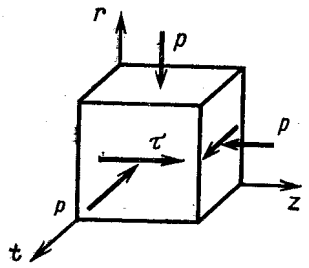


Рис. 101

с помощью вариационного уравнения Лагранжа, меньше соответствующих величин, определяемых точным решением задачи. В случае *а* это соотношение очевидно. В случае *б*, на первый взгляд, оно не выполняется. Объясняется это тем, что сравнивать следует обобщенные перемещения. Для равномерно распределенной нагрузки обобщенным перемещением является $\int_l ydz$. Проделав соответствующие выкладки, легко убедиться, что в случае *б* обобщенное перемещение, полученное с помощью вариационного уравнения Лагранжа, меньше его точного значения.

5.05. $R = \dfrac{3}{8} ql$. Расчетная схема показана на рис. 100. Потенциальная энергия равна $U = \dfrac{1}{2EI_x} \int_0^l \left(Rz - \dfrac{qz^2}{2}\right)^2 dz$. Перемещение точки приложения силы R равно нулю, поэтому $\dfrac{\partial U}{\partial R} = 0$.

5.06. $u = \sqrt[3]{\dfrac{Pl^3}{EF}}$. Энергия деформации $U = \int_{2l} \frac{1}{2} \varepsilon^2 EF\, dz$; продольная деформация $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{1}{\cos\alpha} - 1 = \dfrac{\alpha^2}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u}{l}\right)^2$. По формуле Лагранжа $\dfrac{\partial U}{\partial u} = P$.

5.07. $\varphi = \frac{9\pi}{16}\frac{MR}{EI_x} = 1{,}767\frac{MR}{EI_x}$.

5.08. $U_P = 6{,}979\frac{P^2l^3}{Ea^4}$; $U_M = 3{,}479\frac{M^2l}{Ea^4}$; $U_\Sigma = 3{,}5\frac{M^2l}{Ea^4}$.

5.09. $U = A = 1{,}687$ Дж. Напряженное состояние материала трубки показано на рис. 101, $\sigma_r = \sigma_t = \sigma_z = -100$ МПа, $\tau = 50{,}9$ МПа. Удельная энергия деформации $W = \frac{1}{2E}[I_1^2 + 2(1+\mu)I_2]$, где I_1, I_2 — инварианты тензора напряжений. Энергия деформации трубки равна $U = W\pi Dhl$ (напряженное

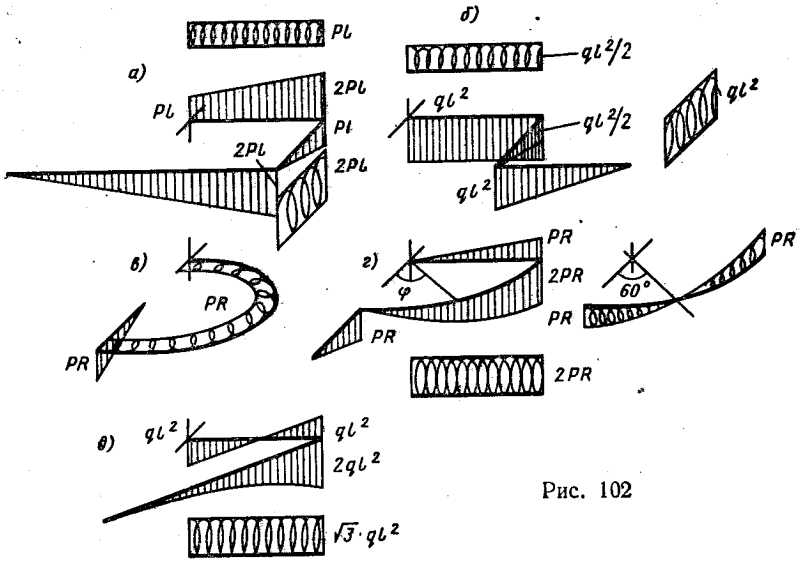


Рис. 102

состояние однородное). Каждая из внешних нагрузок (пара сил и давление) совершает работу на перемещении только ею вызываемом, поэтому работа скручивающих моментов $A_м = \frac{1}{2}\frac{M^2l}{GI_к}$, работа давления $A_p = \frac{1}{2}p\Delta V$, где Δ — объемная деформация; V — объем материала трубки. Подставив числовые данные, получим $A_м = 0{,}509$ Дж; $A_p = 1{,}178$ Дж. Работа внешних нагрузок $A = A_м + A_p$.

5.10. $U = A = 4{,}6$ Дж. См. пояснение к решению задачи 5.09. Отметим, что в данном случае напряженное состояние неоднородное, поэтому $U = l\int\limits_F WdF$.

5.11. Эпюры изгибающих и крутящих моментов даны на рис. 102. $U = 5{,}83\frac{P^2R^3}{EI_x}$. Уравнения внутренних моментов на криволинейном участке в случае $г$ имеют вид $\mathcal{M}_{изг} = 2PR\sin\varphi$; $\mathcal{M}_к = PR(1 - 2\cos\varphi)$.

5.12. Эпюры изгибающих и крутящих моментов даны на рис. 103.

5.13. Схема закрепления и эпюры показаны на рис. 104; $\delta_B = \frac{19}{4}\frac{Pl^3}{EI_x}$. Для вычисления перемещения с помощью теоре-

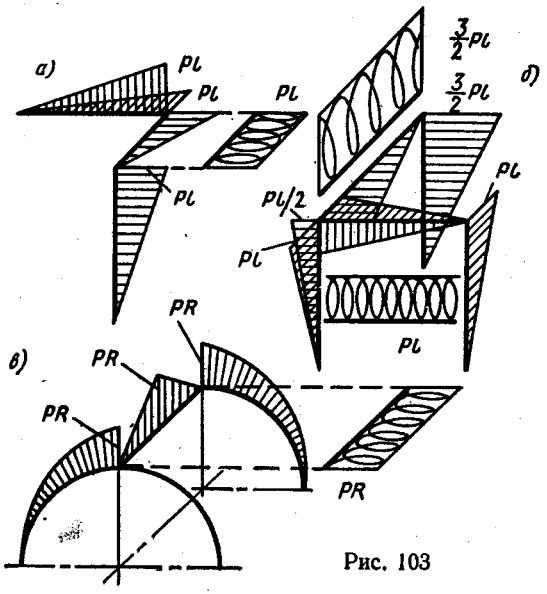


Рис. 103

мы Кастильяно момент Pl обозначаем M и записываем потенциальную энергию деформации в виде $U = \frac{1}{2EI_x}\left[\frac{1}{3}P^2l^3 + \frac{1}{3}\left(P + \frac{M}{l}\right)^2 l^3\right] + \frac{1}{2GI_к}[P^2l^3 + (Pl + M)^2 l]$.

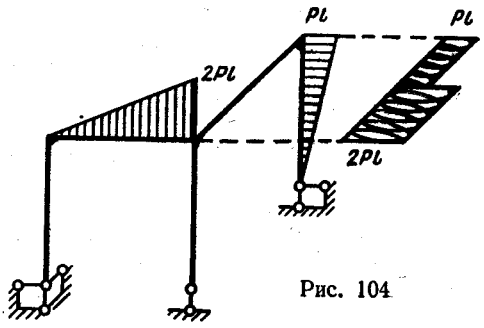


Рис. 104

5.14. Эпюры внутренних силовых факторов даны на рис. 105. Перемещение сечения A равно: *а)* $\delta_A = \frac{23}{258}\frac{Ml^2}{EI_x}$; *б)* $\delta_A = 0{,}645\frac{ql^4}{EI_x}$. В случае *а* $GI_к = \frac{3}{5}EI_x$ и вычисления целесообразно вести в простых дробях. Рациональная основная система получается путем разреза рамы по плоскости симметрии. В случае *б* $GI_к = 0{,}677EI_x$ и расчет следует вести в десятичных дробях. При выборе основной системы следует учесть симметрию.

5.15. Рациональная основная система показана на рис. 106, там же приведены эпюры изгибающих и крутящих моментов. Перемещение $\delta_A = 0$.

5.16. $\sigma_{max} = \frac{3P}{\pi h^2} = 114{,}6$ МПа. Расчетная схема показана на рис. 107, *а*. Интенсивность нагрузки $m = \frac{P(D-d)}{\pi(D+d)}$. Хотя

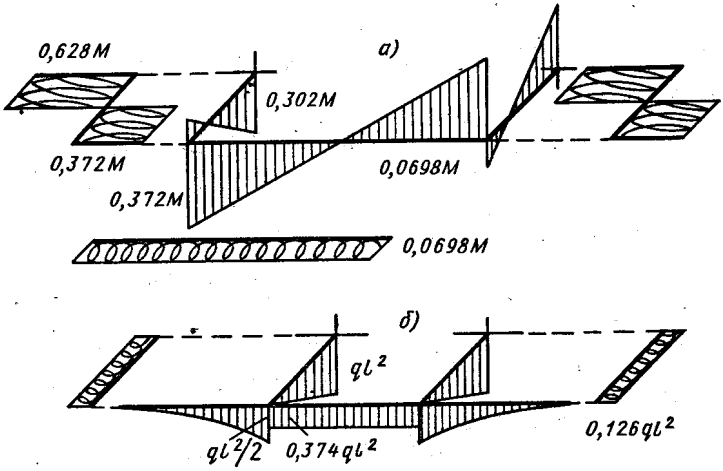


Рис. 105

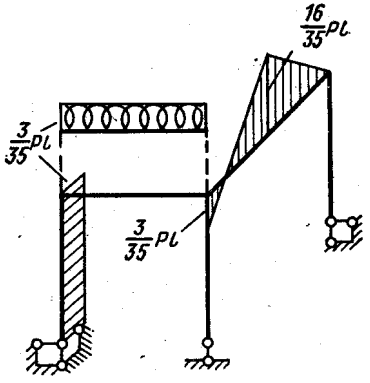


Рис. 106

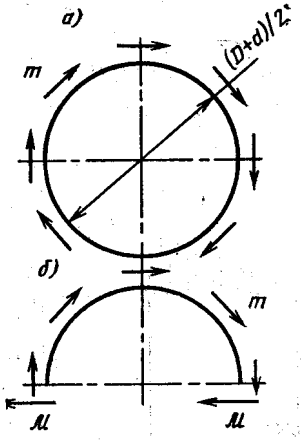


Рис. 107

задача является статически неопределимой, внутренние моменты $\mathcal{M}$ с учетом симметрии можно определить из условия равновесия половины рамы, нагруженной внешними и внутренними силами (рис. 107, *б*) $\mathcal{M} = m(D + d)/4$.

5.17. $n_т = 7{,}1$. Наиболее нагруженное сечение A. Эпюры изгибающих и крутящих моментов, возникающих в сечениях рамы при нагреве, показаны на рис. 108 (значения моментов даны в Н·м).

5.18. Зависимость между нагрузкой P и взаимным перемещением w_{1-2} деталей приведена на рис. 109. При $P \leqslant T$ детали остаются взаимно неподвижными.

5.19. $H_0 = 95{,}4$ мм; $H = 50$ мм; $n_т = 1{,}5$.

5.20. $\Delta D = 2{,}04$ мм; $\sigma_{max} = 882$ МПа; $\varphi = 2{,}56$ рад. Изменение диаметра пружины вычисляем по методу Мора, для чего прикладываем к витку в его плоскости две единичных силы, направленные по диаметру от оси пружины (рис. 110)

$$\Delta D = \int_0^{\pi} \frac{MR \sin\alpha \, R \, d\alpha}{EI_x}.$$

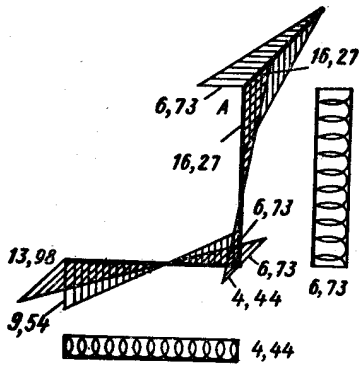


Рис. 108

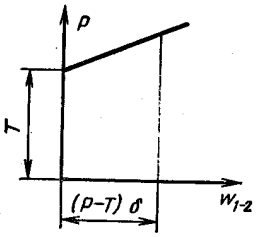


Рис. 109

5.21. $P = 500$ Н; $\tau_{max} = 578$ МПа; $\Delta D = 0{,}243$ мм. Высота пружины в свободном состоянии $H_0 = it + d$, при полной посадке витков $H = d\,(i + 1)$.

5.22. $\tau^{(1)}_{max} = 151{,}7$ МПа; $\tau^{(2)}_{max} = \tau^{(4)}_{max} = 108{,}4$ МПа; $\tau^{(3)}_{max} = 65{,}03$ МПа; $\delta_A = 24{,}4$ мм.

5.23. В балке $\sigma_{max} = 66{,}5$ МПа; в пружине $\tau_{max} = 68{,}3$ МПа. Эквивалентная система показана на рис. 111, условие эквивалентности имеет вид $\delta_{11}X_1 + \delta_{1P} = -\lambda$, где λ — осадка пружины под действием силы X_1. Сила взаимодействия между балкой и пружиной равна $0{,}166P$.

5.24. В пружине $\tau_{max} = 223$ МПа; в рычаге $\sigma_{max} = 243$ МПа. Расчетная схема показана на рис. 112. Уравнение перемещений имеет вид $\delta_{11}X_1 + \lambda = \Delta$, где X_1 — сила взаимодействия между рычагом и пружиной; λ — осадка пружины. $X_1 = 391$ Н.

5.25. $\sigma_{max} = 759$ МПа. Расчетная схема показана на рис. 5.25. Взаимное смещение концов булавки является результатом изгиба прямых стержней и скручивания пружины A. Податливость системы равна $\delta = \frac{2}{EI_x}\frac{l^3}{3} + \frac{5}{2}\frac{\pi D l^2}{EI_x}$. По условию взаимное смещение концов в закрытом состоянии равно 26 мм, поэтому

$P\delta = 26 \cdot 10^{-3}$, где P — сила, деформирующая булавку. Зная силу P, нетрудно определить напряжения.

5.26. $P_{max} = 1217$ Н; $\lambda_{ост} = 56{,}6$ мм. Эпюры остаточных и рабочих напряжений показаны на рис. 113. Порядок решения задачи следующий. Осадка пружины при заневоливании * $\lambda =$

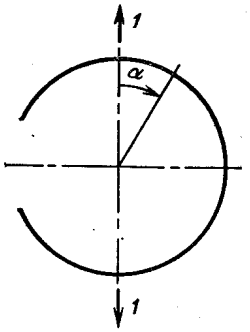


Рис. 110

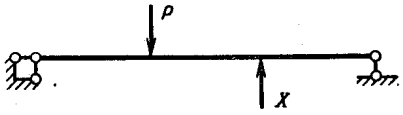


Рис. 111

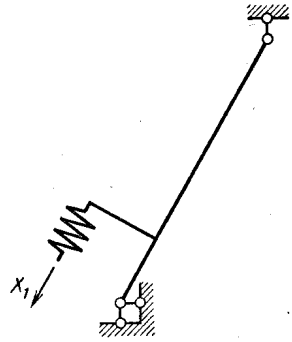


Рис. 112

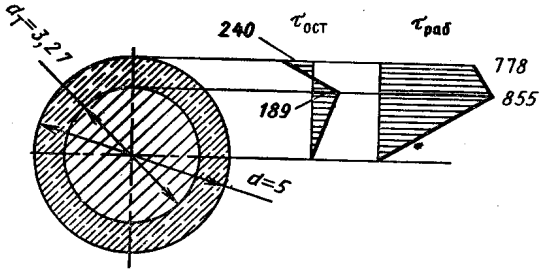


Рис 113.

$= L_0 - id$. Интеграл Мора при упруго-пластических деформациях имеет вид $\lambda = \int_s \mathscr{M}_1 \theta d$, где θ — крутка. Приравнивая вычисленные таким образом величины λ, получим $\theta = \frac{2\lambda}{\pi D^2 i}$. С другой

* Заневоливанием называется технологическая операция длительного (сутки или двое) деформирования упругого элемента за предел текучести на величину перемещения, превышающего таковое в рабочих условиях. В результате заневоливания повышается несущая способность в пределах упругости.

стороны, наибольшая деформация сдвига $\gamma_{max} = \theta \frac{d}{2}$. Зная γ_{max} и диаграмму сдвига материала, строим эпюру касательных напряжений по сечению и вычисляем внутренний крутящий момент $\mathcal{M}_{max}$ при сжатии пружины до соприкосновения витков. Сила обжатия $P_{max} = 2\mathcal{M}_{max}/D$. Затем вычисляем так называемые разгрузочные напряжения $\tau = \mathcal{M}_{max}/W_к$, строим эпюру остаточных напряжений, вычисляем $\lambda_{раз} = \frac{8P_{max}D^3 i}{Gd^4}$ и определяем $\lambda_{ост} = \lambda - \lambda_{раз}$. Эпюра рабочих напряжений получается наложением напряжений, вызванных действием нагрузки P на остаточные.

6.01. *а*) $n_т = 1$; *б*) $n_т = 1{,}4$; *в*) $n_т = 1{,}7$. В случаях *г* и *д* имеют место трехосные растяжение и сжатие, для которых теории начала текучести экспериментально не проверены, поэтому вопрос о коэффициенте запаса по текучести остается открытым. В случае *б* напряженное состояние тоже трехосное растяжение, но третье главное напряжение не очень сильно отличается от нуля, поэтому можно предположить допустимость применения теории начала текучести Мора и в этом случае.

6.02. По теории наибольших касательных напряжений для бруса круглого поперечного сечения прочность определяется величиной $K = \sqrt{\mathcal{M}_{zx}^2 + \mathcal{M}_{zy}^2 + \mathcal{M}_к^2}$. Эпюра K показана на рис. 114, наиболее напряженное сечение A.

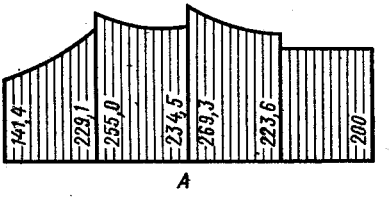


Рис. 114

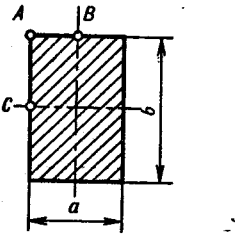


Рис. 115

6.03. Отношение площадей, а следовательно, и масс брусьев квадратного F_1 и круглого F_2 сечений равны $F_1 : F_2 = 1{,}062$; диаметр d со стороной квадрата a равнопрочных сечений связан соотношением $d = 1{,}095a$.

6.04. *а*) $M_1 = M_2$; *б*) $M_1 = 1{,}143M_2$; *в*) $M_1 = 1{,}33M_2$.

6.05. *а*) Точки пересечения плоскости действия суммарного изгибающего момента с контуром поперечного сечения.

б) Пусть $b \geqslant a$ (рис. 115). Для определения положения наиболее напряженной точки нужно: 1) если $\sigma^B \leqslant \sigma^C$, сравнить эквивалентные напряжения в точках A и C; 2) если $\sigma^B \geqslant \sigma^C$, сравнить значения $\sigma_{экв}$ в точках A, B и C.

в) Точка в левом верхнем углу сечения, если знаки моментов такие, как на рис. 6.05.

6.06. Эпюры внутренних моментов показаны на рис. 116: *а* — все сечения равнонапряжены; *б* — в сечении около заделки $\sigma_{экв\ max} = 1{,}5M/b^3$, в сечении около незакрепленного конца $\sigma_{экв\ max} = 4{,}06M/b^3$.

6.07. $D : d = 1{,}152$. По теории начала текучести Хубера—Мизеса $\sigma_{экв} = \sqrt{I_1^2 + 3I_2}$, где I_1, I_2 — инварианты тензора напряжений. В данном случае условие равнопрочности имеет вид

$\sqrt{(-2p)^2+3(-p^2+\tau_1^2)}=\sqrt{3\tau_2^2}$, где τ_1 — наибольшее касательное напряжение в сечениях вала внутри камеры; τ_2 — то же, для сечений вне камеры.

6.08. $n_т = 1{,}6$. Напряженное состояние в расчётной точке изображено на рис. 117.

6.09. $\sigma^б_{экв} : \sigma^а_{экв} = 1{,}118$. В случае *а* наиболее напряженное сечение зацепа находится в условиях изгиба, $\mathcal{M}_{изг} = PR$. В случае *б* в сечении *n—n* (см. рис. 6.09) возникают изгибающий момент $\mathcal{M}_{изг} = PR$ и крутящий момент $\mathcal{M}_к = PR\cos 60°$.

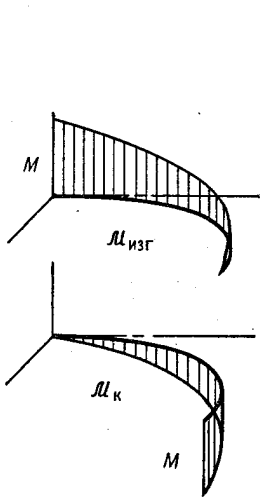


Рис. 116

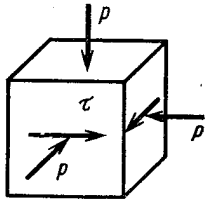


Рис. 117

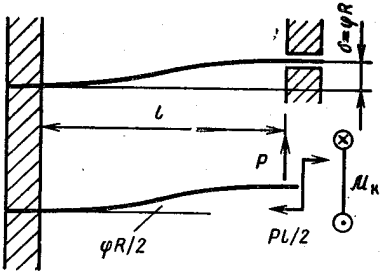


Рис. 118

6.10. $n_т = 1{,}6$. При взаимном повороте дисков стержни изгибаются и скручиваются. Изгибные деформации стержня и схема нагружения его показаны на рис. 118. Крутящий момент определяем по формуле $\mathcal{M}_к = \varphi G I_к / l$. Связь между $\delta = \varphi R$ и силой P определяем по методу Мора—Верещагина. В результате получаем $\delta = \frac{Pl^3}{12EI_x}$. Величина δ известна, вычисляем P, а затем определяем напряжения.

6.11. $\varphi = 0{,}01297$ рад, $n_т = 2{,}5$. Эквивалентная система показана на рис. 119. Связь между неизвестными X_1 и X_2 можно определить из условия равновесия половины рамы, которое с учетом симметрии, имеет вид $2X_2 + X_1 b = M$, откуда $X_2 = \frac{1}{2}(M - X_1 b)$. Теперь из двух канонических уравнений метода сил остается решить одно $\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0$. Суммарная эпюра изгибающих и крутящих моментов дана на рис. 119.

6.12. $n_т = 1{,}7$. Для сборки к свободному концу стержня нужно приложить силу, составляющие которой по координатным осям

обозначим X_1, X_2, X_3 (рис. 120). В канонических уравнениях метода сил коэффициенты влияния $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$; $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$, поэтому для определения сил X_1, X_2, X_3 получаем упрощенную систему

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0;$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = \delta;$$
$$\delta_{33}X_3 = \delta.$$

Решив эти уравнения, найдем $X_1 = 289$ Н; $X_2 = 680$ Н; $X_3 = 65{,}8$ Н. Определяем наибольшие эквивалентные напряжения для сечений A и B. Наиболее напряженным оказывается сечение B.

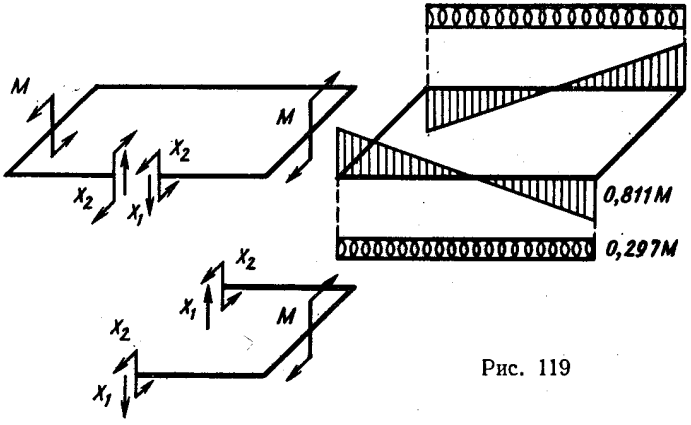


Рис. 119

6.13. Найдем эквивалентные напряжения в точках A, B и C сечения балки около заделки (рис. 121) $\sigma^A_{экв} = \sigma^A = 202$ МПа; $\sigma^B_{экв} = 176$ МПа, $\sigma^C_{экв} = 40{,}4$ МПа.

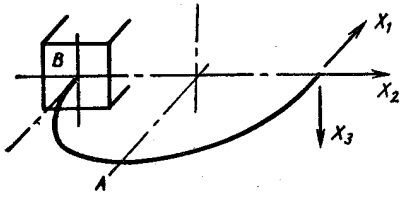


Рис 120

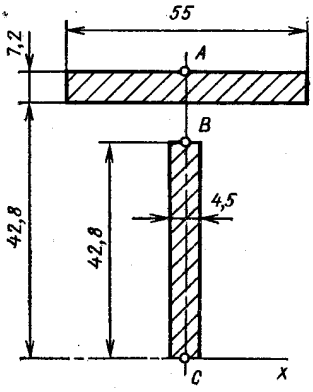


Рис. 121

Очевидно, наибольшее эквивалентное напряжение возникает в точке A, где касательное напряжение равно нулю.

6.14. а) $n_в = 1{,}5$; б) для пластичных материалов критерий начала разрушения не разработан; в) и д) вопрос о коэффициенте

запаса остается открытым, так как для трехосных растяжений и сжатий нет экспериментальной оценки теории начала разрушения; г) одно растягивающее напряжение по сравнению с двумя другими близко к нулю, поэтому коэффициент запаса можно вычислить приближенно: $n_в = 1{,}3$.

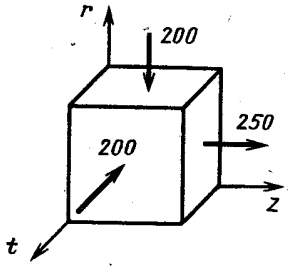


Рис. 122

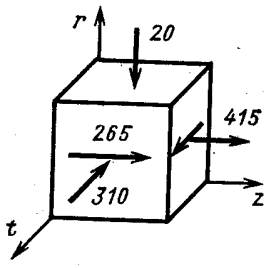


Рис. 123

6.15. $n_в = 1{,}6$. Напряженное состояние материала образца показано на рис. 122; $\sigma_r = \sigma_t = -200$ МПа; $\sigma_z = 250$ МПа.

6.16. $n_в = 2{,}4$. Если сила P постоянна, а момент меняется, вопрос о коэффициенте запаса остается открытым, так как современные теории начала разрушения применимы только при простом нагружении начала разрушения применимы только при простом нагружении.

6.17. $n_в = 2{,}2$; $M_в = 1080$ Н·м; $p_{1в} = 227$ МПа; $p_{2в} = 216$ МПа.

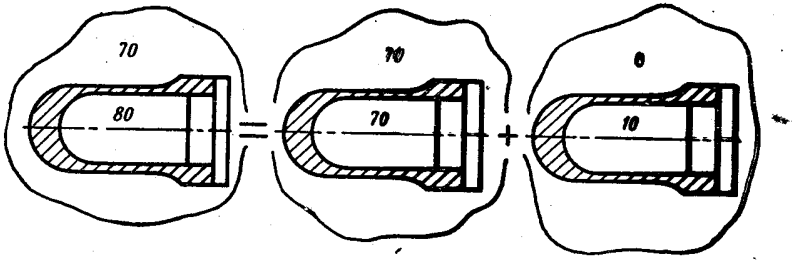


Рис. 124

6.18. $n_в = 2{,}1$. Напряженное состояние материала образца показано на рис. 123 (напряжения даны в МПа).

6.19. При расчете напряжений в тонкостенных трубках, нагруженных большими, близкими по величине внутренним и внешним давлениями, для простоты вычислений удобно представить заданное нагружение как сумму двух: избыточного внутреннего и

равного трехосного сжатия (рис. 124). Напряжения для каждого из этих нагружений вычислить весьма просто. Искомое напряженное состояние получают наложением. В данной задаче такой прием дает значения напряжений $\sigma_z = -32{,}5$ МПа; $\sigma_t = 5$ МПа; $\sigma_r = -80$ МПа; коэффициент запаса $n_в = 5{,}6$.

Напряжения можно определить, применяя метод сечений. В этом случае $\sigma_z = -37{,}3$ МПа; $\sigma_t = 0$; $\sigma_r = -80$ МПа; $n_в = 12{,}5$. Существенное расхождение полученных результатов объясняется тем, что первый способ применим, когда разность давлений $p_1 - p_2$ значительно меньше каждого из этих давлений (как минимум, на порядок).

7.01. Уравнение углов поворота нормали в данном случае ($Q = 0$) имеет вид $\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r}$. Граничные условия: при $r = r_1$ $\mathcal{M}_r = m_1$; при $r = r_2$ $\mathcal{M}_r = m_2$. Выражения для моментов

$$\underset{t}{M_r} = \frac{m_2 r_2^2 - m_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \mp \frac{(m_2 - m_1) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2}.$$

Функцию прогибов с учетом того, что при $r = r_1$ $w = 0$, можно представить в виде

$$w = -\frac{m_2 r_2^2 - m_1 r_1^2}{D(1+\mu)(r_2^2 - r_1^2)} \frac{r^2 - r_1^2}{2} - \frac{m_1 - m_2}{D(1-\mu)} \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r}{r_1},$$

где D — цилиндрическая жесткость. Эпюры внутренних моментов $\mathcal{M}_r$ и $\mathcal{M}_t$ и форма срединной поверхности для заданных частных случаев показаны на рис. 125. Там же даны эпюры моментов для случая 1 при $r_1 \to 0$. Наибольшие эквивалентные напряжения равны: 1) 286 МПа, 2) 286 МПа, 3) 120 МПа, 4) 571 МПа. Наибольшие прогибы: 1) $w_{\max} = -1{,}385$ мм; 2) $w_{\max} = 0{,}679$ мм; 3) $w_{\max} = -0{,}706$ мм; 4) $w_{\max} = -2{,}06$ мм. В случае 1 при $r_1 \to r_2$ текущий радиус r тоже стремится к r_2, уравнения для моментов $\mathcal{M}_r$ и $\mathcal{M}_t$ приводятся к виду $\mathcal{M}_r = m$; $\mathcal{M}_t = m \frac{r_2}{r_2 - r_1}$. Наибольшее эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экв}} = \frac{m r_2 6}{(r_2 - r_1) h^2}$. При расчете пластины по схеме бруса малой кривизны ($r_1 \to r_2$) внутренний момент в поперечном сечении равен $\mathcal{M}_t = m r_2$, а наибольшее напряжение $\sigma_t = \frac{m r_2 6}{(r_2 - r_1) h^2}$, что и следовало ожидать.

7.02. Для пластины радиусом r_0 наибольший прогиб $|w^0_{\max}| = \frac{3+\mu}{1+\mu} \frac{P r_0^2}{16\pi D} = 2{,}538 \frac{P r_0^2}{16\pi D}$. Для пластины с консольной частью $w_{\max} = -2{,}445 \frac{P r_0^2}{16\pi D}$. Ошибка составляет 3,66 %. Для уменьшения ошибки можно прорезать небольшие радиальные щели (рис. 126), которые резко уменьшают окружную жесткость консоли. Для проверки расчета пластины с консолью приведем некоторые промежуточные результаты. Пластина имеет два участка. Между опорами $\vartheta_1 = \frac{P}{4\pi D}\left(C_1 r + \frac{C_2}{r} + r \ln \frac{r}{r_0}\right)$, для консоли $\vartheta_2 = \frac{P}{4\pi D}\left(C_3 r + \frac{C_4}{r}\right)$. Граничные условия: при $r = 0$ $\vartheta_1 = 0$; при $r = r_0$ $\vartheta_1 = \vartheta_2$, $\mathcal{M}_{r1} = \mathcal{M}_{r2}$; при $r = R$ $\mathcal{M}_{r2} = 0$. Постоянные интегрирования $C_1 = -\frac{2{,}21 + 0{,}21\mu}{1+\mu} \frac{1}{2{,}42}$; $C_2 = 0$, $C_3 = -\frac{1-\mu}{1+\mu} \times \frac{1}{2{,}42}$; $C_4 = -\frac{r_0^2}{2}$. Уравнение прогибов для центральной части

пластины $w_1 = \frac{P}{4\pi D}\left[C_5 - C_1\frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2}\ln\frac{r}{r_0} + \frac{r^2}{4}\right]$. Из условия $w_1 = 0$ при $r = r_0$ определяем C_5, а затем вычисляем прогиб в центре пластины.

7.03. $\sigma_{экв}^{max} = 111{,}7$ МПа; $w_{max} = 0{,}233$ мм. Уравнение углов поворота $\vartheta = \frac{p}{16D}\left(C_1 r + \frac{C_2}{r} - r^3 + 4r_1^2 r\ln\frac{r}{r_1}\right)$. Граничные условия: при $r = r_1$ $M_r = 0$; при $r = r_2$ $\vartheta = 0$. Постоянные интегрирования $C_1 = 1{,}8696r_1^2$; $C_2 = 4{,}471r_1^4$. Уравнения изгибающих моментов в окружных и радиальных сечениях $M_r = \frac{pr_1^2}{16}\left(6{,}431 - 3{,}130\frac{r_1^2}{r^2} - 3{,}30\frac{r^2}{r_1^2} + 5{,}20\ln\frac{r}{r_1}\right)$; $M_t = \frac{pr_1^2}{16}\times\left(3{,}631 + 3{,}130\frac{r_1^2}{r^2} - 1{,}90\frac{r^2}{r_1^2} + 5{,}20\ln\frac{r}{r_1}\right)$.

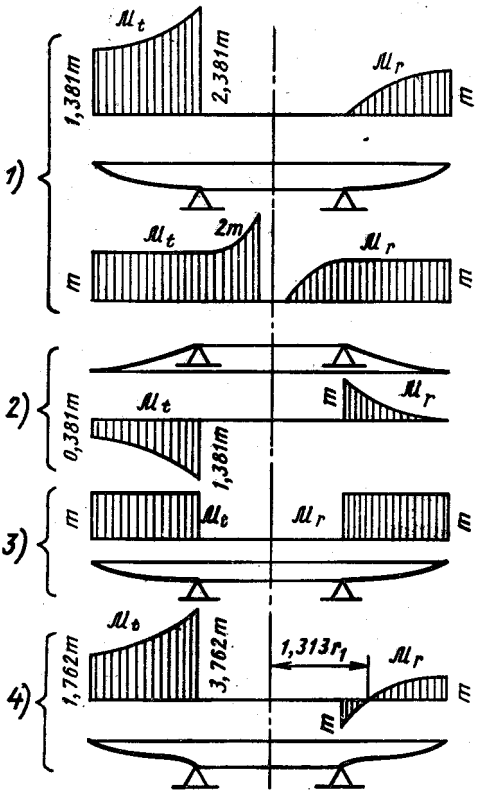


Рис. 125

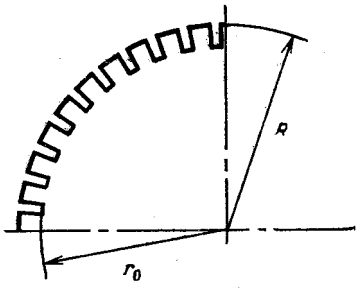


Рис. 126

Эпюры моментов M_r и M_t показаны на рис. 127. Уравнение прогибов

$$w = \frac{p}{16D}\left(C_3 - C_1\frac{r^2}{2} - C_2\ln\frac{r}{r_1} + \frac{r^4}{4} - 4r_1^2\frac{r^2}{2}\ln\frac{r}{r_1} + 4r_1^2\frac{r^2}{4}\right).$$

Постоянную C_3 определяем из условия $w = 0$ при $r = r_2$.

7.04. $n_т = 1{,}5$. Заданное нагружение пластины представляем как результат наложения изгиба пластины избыточным давлением $p_1 - p_2$ и сжатия давлением p_2. Расчет пластины, защемленной по контуру, нагруженной равномерно распределенным давлением,

приведен в учебнике В. И. Феодосьева «Сопротивление материалов», изд-е 8, 1979. В данном случае, для центра пластины $\sigma_r = \sigma_t = 195$ МПа; $\sigma_z = -100$ МПа; $\sigma_{экв} = 295$ МПа; для контурных точек $\sigma_r = 300$ МПа; $\sigma_t = 90$ МПа; $\sigma_z = -100$ МПа; $\sigma_{экв} = 400$ МПа.

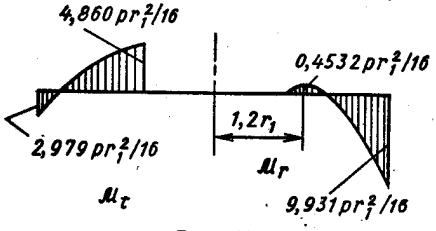


Рис. 127

7.05. $\sigma_{экв}^{max} = 84{,}3$ МПа; $w_{max} = 0{,}0702$ мм. Уравнение углов поворота

$$\vartheta = \frac{p}{16D}\left(C_1 r + \frac{C_2}{r} - r^3 + 4r_2^2 r \ln\frac{r}{r_2}\right).$$

Граничные условия: при $r = r_1$ $\vartheta = 0$; при $r = r_2$ $\vartheta = 0$. Постоянные интегрирования $C_1 = -141{,}65r_1^2$; $C_2 = 142{,}65r_1^4$. Уравнения моментов $\mathcal{M}_r$ и $\mathcal{M}_t$ имеют вид

$$\mathcal{M}_r = \frac{pr_1^2}{16}\left(-84{,}15 - 99{,}86\frac{r_1^2}{r^2} - 3{,}30\frac{r^2}{r_1^2} + 130{,}0\ln\frac{r}{r_1}\right);$$

$$\mathcal{M}_t = \frac{pr_1^2}{16}\left(-154{,}1 + 99{,}86\frac{r_1^2}{r^2} - 1{,}90\frac{r^2}{r_1^2} + 130{,}0\ln\frac{r}{r_1}\right).$$

Эпюры функций $\mathcal{M}_r$ и $\mathcal{M}_t$ даны на рис. 128.

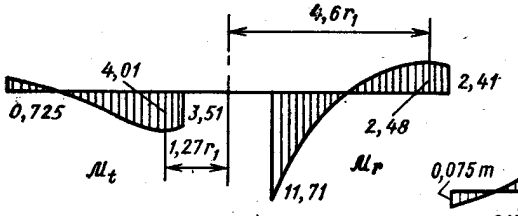


Рис. 128

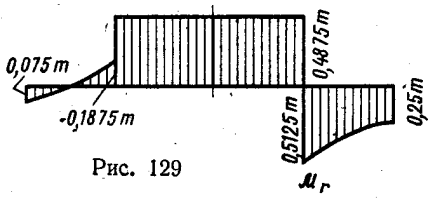


Рис. 129

Наиболее напряженные точки находятся в месте соединения пластины с жестким центром. Уравнение прогибов, с учетом условия $w = 0$ при $r = r_1$,

$$w = \frac{p}{16D}\left[-C_1\frac{r^2 - r_1^2}{2} - C_2\ln\frac{r}{r_1} + \frac{r^4 - r_1^4}{4} - 2r_2^2 r^2\ln\frac{r}{r_1} + r_2^2(r^2 - r_1^2)\right].$$

7.06. Эпюры моментов изображены на рис. 129. Разделим пластину на два участка: первый для $0 \leqslant r \leqslant r_1$, второй для $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. Уравнение углов поворота для первого участка

$\vartheta_1 = C_1 r + \frac{C_2}{r}$, для второго участка $\vartheta_2 = C_3 r + \frac{C_4}{r}$. Постоянные интегрирования определяем на основе граничных условий: при $r = 0$ $\vartheta_1 = 0$; при $r = r_2$ $\vartheta_2 = 0$ и условий сопряжения при $r = r_1$: $\vartheta_1 = \vartheta_2$, $\mathscr{M}_{r2} = \mathscr{M}_{r1} - m$. После соответствующих преобразований находим:

для первого участка

$$\mathscr{M}_{r1} = \mathscr{M}_{t1} = \frac{m(1+\mu)}{2}\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right);$$

для второго участка

$$\mathscr{M}_{r2} = -\frac{m}{2}\left[(1+\mu)\frac{r_1^2}{r_2^2} + (1-\mu)\frac{r_1^2}{r^2}\right];$$

$$\mathscr{M}_{t2} = -\frac{m}{2}\left[(1+\mu)\frac{r_1^2}{r_2^2} - (1-\mu)\frac{r_1^2}{r^2}\right].$$

Уравнение прогибов для первого участка $w_1 = C_5 - C_1\frac{r^2}{2}$; для второго участка $w_2 = C_6 - C_3\frac{r^2}{2} - C_4 \ln\frac{r}{r_2}$. Граничное условие: при $r = r_2$ $w = 0$, условие сопряжения: при $r = r_1$ $w_1 = w_2$. После подстановки и некоторых преобразований найдем

$$w_1 = \frac{mr_1^2}{4D}\left[2\ln\frac{r_2}{r_1} - \frac{r^2}{r_1^2}\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)\right];$$

$$w_2 = \frac{mr_1^2}{4D}\left[2\ln\frac{r_2}{r} - 1 + \frac{r^2}{r_2^2}\right].$$

7.07. Наибольшее эквивалентное напряжение в пластине постоянной толщины составляет 1,005 соответствующей величины в ступенчатой пластине, а наибольший прогиб — 1,208 максимального прогиба пластины постоянной толщины.

Приведем некоторые промежуточные данные расчета пластины переменной толщины. Для первого участка $\left(0 \leqslant r \leqslant r_1 = \frac{d}{4}\right)$ $\vartheta_1 = \frac{p}{16D}\left(C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{r^3}{2}\right)$, для второго участка $\left(r_1 \leqslant r \leqslant r_2 = \frac{d}{2}\right)$ $\vartheta_2 = \frac{p}{16D}\left(C_3 r + \frac{C_4}{r} - r^3\right)$, где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu)^2}$ — цилиндрическая жесткость на втором участке (в расчете принято $1{,}26^3 = 2$). Граничные условия и условия сопряжения: при $r = 0$ $\vartheta_1 = 0$; при $r = r_1$ $\vartheta_1 = \vartheta_2$; $\mathscr{M}_{r1} = \mathscr{M}_{r2}$, при $r = r_2$ $\mathscr{M}_{r2} = 0$.

Постоянные интегрирования $C_1 = 5{,}768r_1^2$; $C_2 = 0$; $C_3 = 9{,}693r_1^2$; $C_4 = -3{,}424r_1^4$.

Уравнения моментов:

для первого участка

$$\mathscr{M}_{r1} = pr_1^2\left(0{,}9374 - 0{,}2062\frac{r^2}{r_1^2}\right);$$

$$\mathscr{M}_{t1} = pr_1^2\left(0{,}9374 - 0{,}1188\frac{r^2}{r_1^2}\right);$$

для второго участка

$$\mathcal{M}_{r2} = pr_1^2\left(0{,}7875 + 0{,}1498\frac{r_1^2}{r^2} - 0{,}2062\frac{r^2}{r_1^2}\right);$$

$$\mathcal{M}_{t2} = pr_1^2\left(0{,}7875 - 0{,}1498\frac{r_1^2}{r^2} - 0{,}1188\frac{r^2}{r_1^2}\right).$$

Эпюры моментов $\mathcal{M}_r$ и $\mathcal{M}_t$ изображены на рис. 130.

Наибольшее эквивалентное напряжение возникает в центре и равно $\sigma_{экв}^{max} = 0{,}221\frac{pd^2}{h}$.

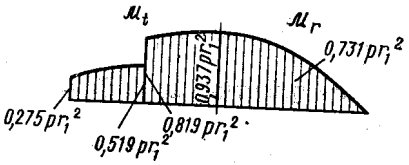


Рис. 130

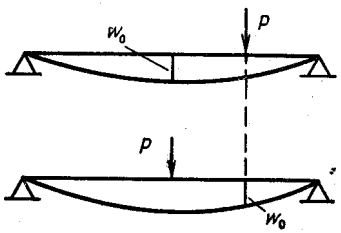


Рис. 131

Уравнения прогибов:
для первого участка

$$w_1 = \frac{p}{16D}\left(C_5 - C_1\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{8}\right);$$

для второго участка

$$w_2 = \frac{p}{16D}\left(C_6 - C_3\frac{r^2}{2} - C_4\ln\frac{r}{r_1} + \frac{r^4}{4}\right).$$

Постоянные C_5 и C_6 определяем из условий: при $r = r_2$ $w_2 = 0$; при $r = r_1$ $w_1 = w_2$. Прогиб в центре пластины $w_{max} = 0{,}698\frac{pr_1^4}{D}$. Условие равенства масс пластин, приводит к зависимости $h_0 = 1{,}065h$. Расчет пластины постоянной толщины приведен в учебнике В. И. Феодосьева «Сопротивление материалов» изд-е 8,1979.

7.08. $w_0 = \frac{PR^2}{32\pi D}\left(\ln 0{,}5 + \frac{3+\mu}{1+\mu}\frac{3}{2}\right)$. В соответствии с теоремой о взаимности перемещений искомый прогиб w_0 равен прогибу при $r = 0{,}5R$ в пластине, нагруженной сосредоточенной силой в центре (рис. 131).

8.01. $\tau_{max} = \frac{pd}{8h}$.

8.02. $\frac{h_1}{h_2} = \frac{2-\mu}{1-\mu}$. Напряжения изгиба равны нулю, если радиальные перемещения точек срединной поверхности цилиндра и сферы одинаковы. Радиальное перемещение u определяем по формуле $u = \varepsilon_t r$, окружная деформация ε_t связана с напряжениями законом Гука.

8.03. $\sigma_{экв} = 120$ МПа; $\Delta D = 0{,}0264$ мм. Заданное нагружение представляем как сумму двух: всестороннего равного сжатия давлением p_2 и внутреннего давления $\Delta p = p_1 - p_2$ (рис. 132).

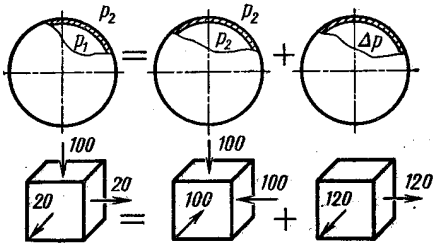


Рис. 132

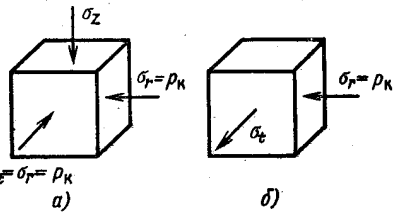


Рис. 133

Суммарное напряженное состояние показано на том же рисунке (напряжения даны в МПа). Изменение диаметра ΔD определяем по формуле $\Delta D = D\varepsilon_t$.

8.04. $\Delta D = 0{,}2$ мм; $\sigma_t = 80$ МПа. Напряженное состояние резины показано на рис. 133, *а*, трубки — на рис. 133, *б*. Контактное давление $p_к$ между резиной и трубкой определяем из условия равенства окружной деформации ε_t резины и трубки.

8.05. $k = 0{,}768 \cdot 10^{-9}$ 1/Па; ошибка, вызванная неучетом сжимаемости колбы, составляет 2,87%. Уменьшение объема жидкости $\Delta V_ж$ связано с уменьшением объема колбы $\Delta V_к$ и перемещением δ поршня вниз зависимостью $\frac{\pi d^2}{4}\delta = \Delta V_ж - \Delta V_к$. Напряженное состояние стенок колбы — равное трехосное сжатие давлением p. Изменение диаметра колбы $\Delta D = \frac{pD}{E}(1 - 2\mu)$ приводит к изменению объема внутри колбы $\Delta V_к$, которое с точностью до малых высшего порядка определяется формулой $\Delta V_к = \frac{1}{6}\pi D^2 3\Delta D$. Изменение объема жидкости $\Delta V_ж = p\frac{\pi D^3}{6k}$.

8.06. Датчик следует наклеить в окружном направлении $\alpha = \frac{\Delta\varepsilon_t}{\Delta n}$, где $\Delta\varepsilon_t = \frac{2\Delta p}{\pi DhE}$; Δn — разность отсчетов.

8.07. В сечении $n—n$ $n_т = 2$, в сечении $m—m$ $n_т = 2{,}1$. Напряженное состояние в расчетных точках сечений показано на рис. 134 (напряжения даны в МПа). В точке A $\sigma_z = 126{,}4$.

8.08. $n_т = 2{,}5$. Труба находится под действием внутреннего давления p и равномерно распределенной нагрузки q. Так как

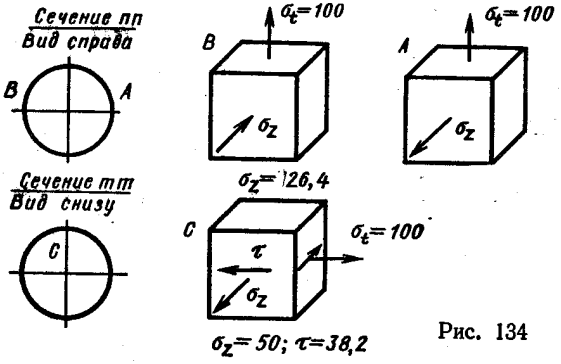


Рис. 134

труба достаточно длинная, то все пролеты находятся в одинаковых условиях, и ось изогнутой трубы имеет форму, изображенную на рис. 135. Там же показана схема нагружения трубы между опорами.

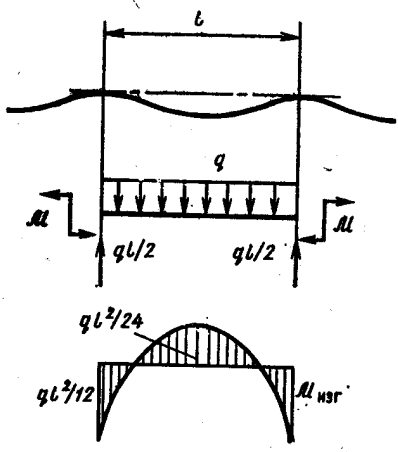


Рис. 135

Внутренние моменты в сечениях над опорами определяем из условия равенства нулю взаимного угла поворота этих сечений. В результате получим $M = ql^2/12$.

8.09. Эпюры напряжений σ_m и σ_t показаны на рис. 136.

8.10. См. рис. 137.

8.11. $n_т = 2$. Напряжение, вызванное изменением температуры трубки, определяем по формуле $\sigma_z = E\alpha\,(t_2 - t_1)$, где α — коэффициент линейного расширения материала трубки.

8.12. Без обмотки $n_т = 1{,}4$; при наличии обмотки $n_т = 2{,}5$. Так как в последнем случае напряжения в баллоне непропорциональны давлению, коэффициент запаса по текучести естественно определять как отношение давления $p_т$, при котором появляются первые пластические деформации, к рабочему давлению p, т. е. $n_т = p_т/p$. Приведем коротко расчет баллона, подкрепленного проволочной обмоткой. Зависимость между натяжением проволоки N_0 и окружным напряжением в баллоне σ_t^0, вызванным этим натя-

жением, из условия равновесия имеет вид $\sigma_t^0 = \frac{N_0}{h\,d}$. Напряжения в баллоне σ_t^p, σ_z и проволоке $\sigma_п^p$ при действии внутреннего давления p без учета начального натяжения определяем, решая систему уравнений равновесия $2\left(\sigma_t^p h\,d + \sigma_п^p \frac{\pi d^2}{4}\right) = pDd$ и совместности деформаций $\sigma_t^p - \mu\sigma_z = \sigma_п^p$, где $\sigma_z = \frac{pD}{4h}$. При сов-

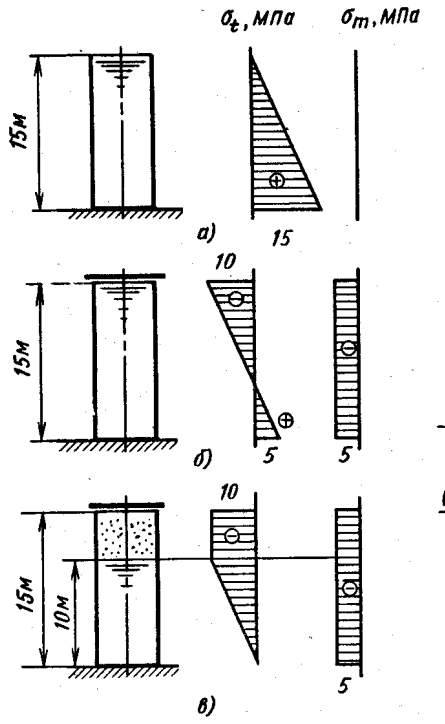


Рис. 136

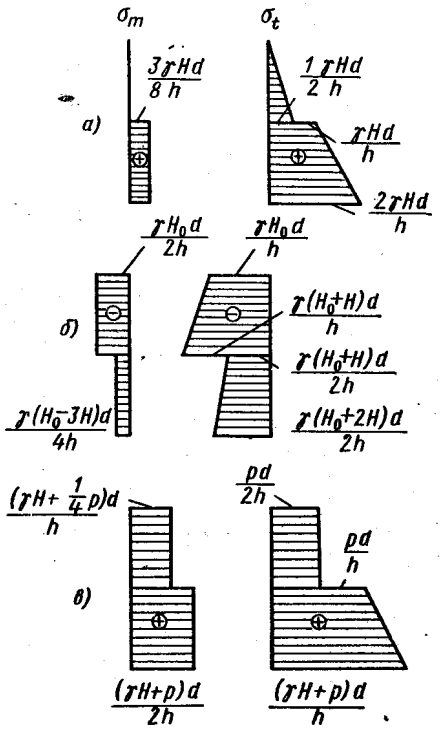


Рис. 137

местном действии натяжения проволоки и внутреннего давления напряжения в баллоне $\sigma_z = \frac{pD}{4h} = 10p$;

$$\sigma_t = \frac{pD}{2h}\left(\frac{1-\frac{\mu}{2}}{1+\frac{\pi d}{4h}} + \frac{\mu}{2}\right) - \frac{N_0}{h\,d} = (16{,}47p - 133{,}3)\ \text{МПа}.$$

При 8,09 МПа $< p \leqslant$ 20,6 МПа $\sigma_z > \sigma_t$, и, следовательно, $\sigma_{экв} = \sigma_z$. При $p >$ 20,6 МПа $\sigma_{экв} = \sigma_t$. Приравнивая $\sigma_{экв} = \sigma_т$, находим давление $p_т$, при котором возникают первые пластические

деформации. Напряжение в проволоке при $p = p_т$ равно 966 МПа, что меньше предела текучести проволоки.

8.13. $\Delta V = T\frac{D^2(1-\mu)}{4Eh}$. Рассмотрим два состояния сферической оболочки: 1) оболочка, нагруженная заданными сжимающими силами T, и 2) оболочка, нагруженная давлением p (рис. 138). На основе свойства взаимности работ $T\Delta D_2 = p\Delta V_1$, где ΔD_2 — изменение диаметра оболочки во втором состоянии, $\Delta V_1 = \Delta V$ — изменение объема сферы в первом состоянии. Используя известные зависимости для сферической оболочки, нагруженной давлением, получим $\Delta D_2 = \varepsilon_t D$; $\varepsilon_t = \frac{pD}{4hE}(1-\mu)$.

8.14. $\sigma_t = \rho\omega^2 d^2/4$; $\sigma_m = \mu\rho\omega^2 d^2/4$; $\sigma_r = 0$. Вращение валика с постоянной угловой скоростью эквивалентно нагружению его внутренним давлением $q = \rho h\omega^2 d/2$.

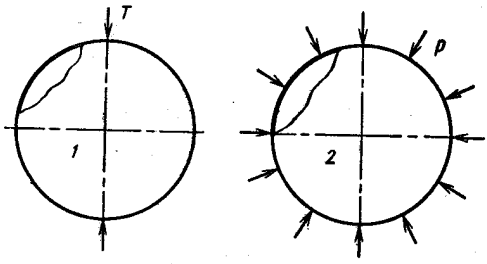


Рис. 138

8.15. Эквивалентное напряжение по теории начала текучести Мора для материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, не зависит от давления всестороннего равного сжатия. В данном случае при любом значении p напряжение $\sigma_{экв} = 125$ МПа.

8.16. $p = 6{,}82$ МПа. Осевая деформация $\varepsilon_z = 0$, поэтому по зависимостям теории малых упруго-пластических деформаций $\sigma_z = 0{,}5\sigma_t$, $\varepsilon_t = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}0{,}75\sigma_t$; $\varepsilon_r = -\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}0{,}75\sigma_t = -\varepsilon_t$.

Интенсивность деформаций, определяемая формулой $\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_r-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_t)^2+(\varepsilon_t-\varepsilon_r)^2}$, в данном случае равна $\varepsilon_i = 5{,}77\cdot10^{-3}$. По диаграмме деформирования материала $\sigma_i = 296$ МПа. Из равенства $\varepsilon_t = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}0{,}75\sigma_t = 5\cdot10^{-3}$ определяем σ_t, а затем давление $p = 2\sigma_t h/D$.

8.17. $\Delta l = 0$; $\Delta D = 0{,}238$ мм. Напряжения в трубке $\sigma_r = -200$ МПа; $\sigma_t = 175$ МПа; $\sigma_z = -12{,}5$ МПа (см., например, решение задачи 8.03). Зная компоненты напряжений, определяем σ_i, по диаграмме деформирования ε_i, затем по формулам теории малых упруго-пластических деформаций находим ε_t и ε_z и вычисляем Δl и ΔD.

8.18. $\Delta D_1 = 5D\varepsilon_т$; $\Delta D_{ост} = 4{,}25D\varepsilon_т$; $\Delta D_2 = 4{,}75D\varepsilon_т$. Приведем некоторые промежуточные зависимости: напряжения в сферической оболочке при действии давления p_1 равны $\sigma_t = \sigma_m = \frac{p_1 D}{4h}$;

интенсивность напряжений $\sigma_i = 1{,}5\sigma_т$; интенсивность деформации $\varepsilon_i = 10\varepsilon_т$; окружная деформация $\varepsilon_t = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} 0{,}5\sigma_i$; остаточная окружная деформация $\varepsilon_{t\,ост} = \varepsilon_t - \frac{0{,}5\sigma_i}{E}$; окружная деформация при вторичном нагружении сферы давлением p_2 равна $\varepsilon_{t2} = \varepsilon_{t\,ост} + \frac{0{,}5\sigma_{t2}}{E}$, где $\sigma_{t2} = \frac{p_2 D}{4h}$.

8.19. $\Delta R = (1 - \mu)\frac{pD^2}{8Eh}$. Напряженное состояние материала сферической оболочки определяется компонентами напряжений $\sigma_m = \sigma_t = \frac{pD}{4h}$; $\sigma_r = 0$. Удельная энергия деформации $W = \frac{1}{2E}[I_1^2 + 2(1 + \mu) I_2]$, где I_1, I_2 — инварианты тензора напряжений. Энергия деформации оболочки $U = \pi D^2 h W$. Работа сил давления $A = \frac{1}{2} p\pi D^2 \Delta R$. Приравнивая работу внешних нагрузок энергии деформации, найдем ΔR.

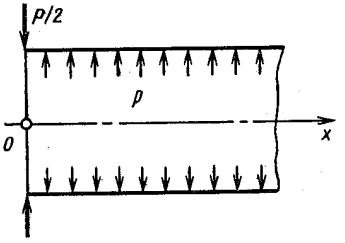


Рис. 139

8.20. $P = 173{,}9$ кН/м. Схема нагружения показана на рис. 139. Уравнение радиальных перемещений w точек срединной поверхности оболочки при $x \geqslant 0$ имеет вид $w = e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + \frac{pR^2}{Eh}$. Постоянные C_1, C_2 и силу P определяем из граничных условий: при $x = 0$ $w = 0$; $\frac{dw}{dx} = 0$; $D\frac{d^3w}{dx^3} = -\frac{P}{2}$, где D — цилиндрическая жесткость. Параметр $k = \sqrt[4]{\frac{3(1 - \mu^2)}{R^2h^2}}$. После соответствующих преобразований получаем $P = 2p/k$.

8.21. Эпюры радиальных перемещений и внутренних силовых факторов показаны на рис. 140; $\sigma_{экв} = 41{,}1\,p = 206$ МПа. Уравнение перемещений w с учетом граничных условий: при $x = 0$ $w = 0$ и $dw/dx = 0$ имеет вид $w = \frac{pR^2}{Eh}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)[1 - e^{-kx} \times (\cos kx + \sin kx)]$. Уравнения внутренних силовых факторов $\mathcal{M}_x = \frac{p}{2k^2}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)e^{-kx}(\cos kx - \sin kx)$; $\mathcal{M}_y = \mu\mathcal{M}_x$; $T_x = \frac{pR}{2}$; $T_y = pR\left[1 - \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)e^{-kx}(\cos kx + \sin kx)\right]$.

Напряженное состояние во внутренней точке оболочки около днища (точка A) и во внешней (точка B) показано на том же рисунке.

8.22. Представим цилиндр с упругими днищами как сочетание оболочки и пластины, схемы нагружения которых показаны на рис. 141, *б*. Расчет оболочки сводится к решению уравнения для

радиальных перемещений: $w_{об} = \frac{pR^2}{Eh}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) + e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx)$, расчет пластины — к решению уравнения для углов поворота $\vartheta_{пл}$, которое в данном случае имеет вид $\vartheta_{пл} = C_3 r -$

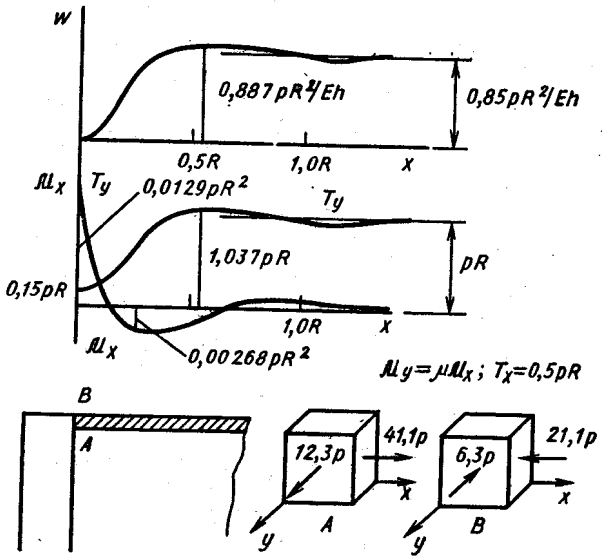


Рис. 140

$-\frac{pr^3}{16D_{пл}}$, где $D_{пл}$ — цилиндрическая жесткость пластины. Постоянные C_1, C_2, C_3 определяем с помощью условий совместности деформаций пластины и оболочки, которые с учетом

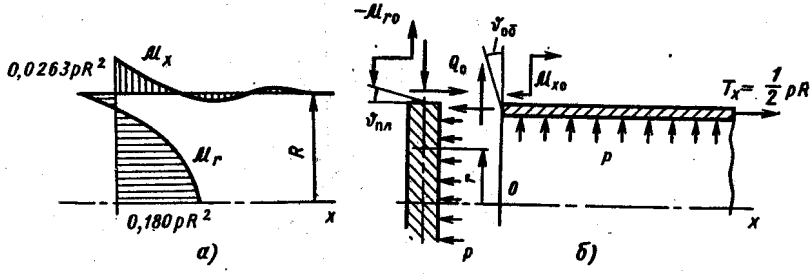


Рис. 141

принятых в теориях пластин и оболочек правил знаков записываем так: в месте стыка $\vartheta_{об} = -\vartheta_{пл}$; $w_{об} = 0$, кроме того, $M_{x0} = -M_{r0}$. В процессе решения целесообразно сначала рассмотреть оболочку.

и выразить постоянные C_1, C_2 через значения внутренних силовых факторов $\mathcal{M}_{x0}$, Q_0 в сечении $x = 0$. В результате получим

при $x = 0$ $w_{об} = \frac{\mathcal{M}_{x0}}{2k^2D} + \frac{Q_0}{2k^3D} + \frac{pR^2}{Eh}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$;

$\vartheta_{об} = -\frac{\mathcal{M}_{x0}}{kD} - \frac{Q_0}{2k^2D}$.

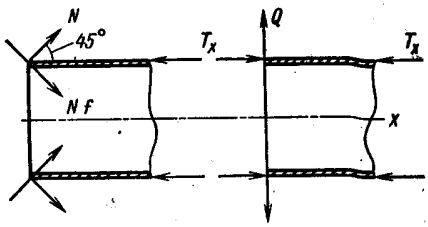


Рис. 142

Затем, рассмотрев пластину, найдем зависимость между C_3 и $\mathcal{M}_{r0}$ и получим уравнение для угла поворота сечения пластины в месте соединения ее с оболочкой $\vartheta_{пл} = \left(\frac{pR^2}{8} - \mathcal{M}_{x0}\right)\frac{R}{D_{пл}(1+\mu)}$.

Условия совместности деформаций образуют два уравнения отно-

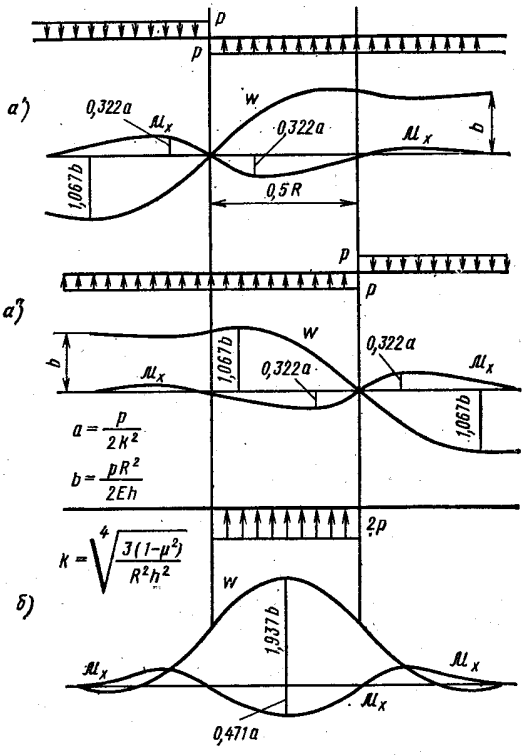


Рис. 143

сительно двух неизвестных $\mathcal{M}_{x0}$ и Q_0. Решая эту систему, получим $Q_0 = -0{,}225pR$; $\mathcal{M}_{x0} = 0{,}0263pR^2$. Эпюры изгибающих моментов $\mathcal{M}_x$ в сечениях оболочки и $\mathcal{M}_\cdot$ в сечениях днища показаны на

рис. 141, *а*. Наибольшее эквивалентное напряжение в оболочке $\sigma_{экв} = 366$ МПа.

8.23. $\sigma_{экв} = 82{,}7$ МПа. Схема нагружения показана на рис. 142; $T_x = \frac{P}{2\pi R}$; $Q = 0{,}106P/R$. Уравнение перемещений имеет вид $w = e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + \mu \frac{T_x R}{Eh}$. Граничные условия: при $x = 0$ $M_x = 0$, $D\frac{d^3w}{dx^3} = 0$, после соответствующих преобразований приводят к уравнению $w = \frac{P}{Eh}(0{,}0477 + 1{,}219e^{-kx}\cos kx)$. Наиболее напряженные точки при $x = 0$, где $\sigma_x = -9{,}55$ МПа; $\sigma_y = 73{,}1$ МПа.

8.24. $\sigma_{экв} = 87{,}6$ МПа. Уравнения радиальных перемещений оболочки с толщиной h_1 $w_1 = e^{-k_1x_1}(C_1 \sin k_1x_1 + C_2 \cos k_1x_1) + \frac{pR^2}{Eh_1}$ и перемещений оболочки с толщиной h_2: $w_2 = e^{-k_2x_2} \times (C_3 \sin k_2x_2 + C_4 \cos k_2x_2) + \frac{pR^2}{Eh_2}$ (направления отсчета координат x_1 и x_2 показаны на рис. 8.21) содержат четыре постоянных интегрирования, для определения которых имеются четыре условия сопряжения этих оболочек: при $x_1 = 0$; $x_2 = 0$ $w_1 = w_2$; $\vartheta_1 = -\vartheta_2$; $M_{x1} = M_{x2}$; $Q_1 = -Q_2$. Решая систему уравнений, получим $C_1 = -0{,}1430\frac{pR^2}{Eh_1}$; $C_2 = -0{,}306\frac{pR^2}{Eh_1}$; $C_3 = -0{,}0358 \times \frac{pR^2}{Eh_1}$; $C_4 = 0{,}1943\frac{pR^2}{Eh_1}$. Наиболее напряженная точка в зоне соединения труб находится в тонкой трубе снаружи при $x_1 = 0$.

8.25. Эпюры перемещений и моментов M_x показаны на рис. 143, *б*. При нагружении по схеме *а* граничные условия имеют вид: при $x = 0$ $w = 0$, $M_x = 0$, как симметричные факторы в кососимметричной системе. Для расчета оболочки, нагруженной по схеме *б*, представим это нагружение как результат наложения двух нагружений (см. рис. 143, *а'* и *а''*), для каждого из которых можно использовать решение задачи, изображенной на схеме рис. 8.22, *а*.

9.01. $n_т = 1{,}2$. Напряжение $\sigma_{экв} = 565$ МПа.

9.02. $n_т = 1{,}1$. Трубка находится под действием внутреннего давления p и крутящего момента $\mathcal{M}_к = 0{,}5PD$. Наиболее напряженные точки расположены у внутренней поверхности трубки, где $\sigma_{экв} = 424$ МПа. Компоненты напряжений в этих точках $\sigma_r = -200$ МПа; $\sigma_t = 217$ МПа; $\sigma_z = 8{,}33$ МПа; $\tau_{zt} = 40{,}8$ МПа.

9.03. $M = 17{,}56pr^3$. Эквивалентное напряжение по теории Хубера—Мизеса удобно вычислять по формуле $\sigma_{экв} = \sqrt{I_1^2 + 3I_2}$, где I_1, I_2 — инварианты тензора напряжений.

9.04. $\alpha = 2$.

9.05. $U = \frac{1+\mu}{E}\pi h p^2 r^2$.

9.06. Напряженное состояние в точках контактной поверхности плиты и штифта показано на рис. 144, *а* и *б* соответственно.

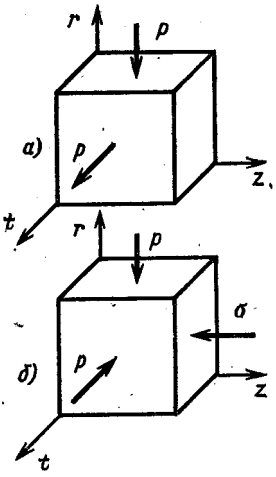


Рис. 144

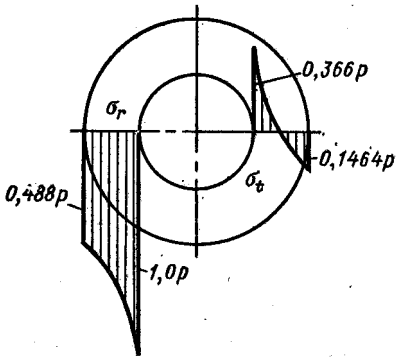


Рис. 145

Контактное давление p определяем из условия равенства радиальных перемещений этих точек; $p = \frac{\mu}{2}\sigma$. Наибольшее эквивалентное напряжение в конструкции возникает в свободной, незапрессованной части штифта, $\sigma_{экв} = \sigma$.

9.07. Эпюры напряжений σ_r и σ_t показаны на рис. 145. Наибольшее эквивалентное напряжение $\sigma_{экв} = 1{,}066p$, возникает в точках внутренней поверхности диска. Контактное давление $p_к$ определяем из условия равенства нулю радиальных перемещений точек наружной поверхности диска.

9.08. $p_0 = 0{,}652\ p = 65{,}2$ МПа. Давление p_0 определяем из условия равенства изменения объема ртути $\Delta V_р$ изменению объема

внутренней полости трубы $\Delta V_т$. Ртуть находится в условиях всестороннего равного сжатия давлением p_0, $\Delta V_р = -p_0 \beta V_0$, где V_0 — первоначальный объем. Труба нагружена внутренним p_0 и внешним p давлениями, изменение объема ее внутренней полости $\Delta V_т = 2\pi r_1 u l + \pi r_1^2 \varepsilon_z l$, где l — длина внутренней полости; u — радиальное перемещение точек внутренней поверхности; ε_z — продольная деформация. После некоторых преобразований формула для $\Delta V_т$ может быть приведена к виду $\Delta V_т = V_0 (2\varepsilon_t + \varepsilon_z)$, где ε_t — окружная деформация при $r = r_1$.

9.09. Эпюры напряжений σ_r и σ_t показаны на рис. 146.

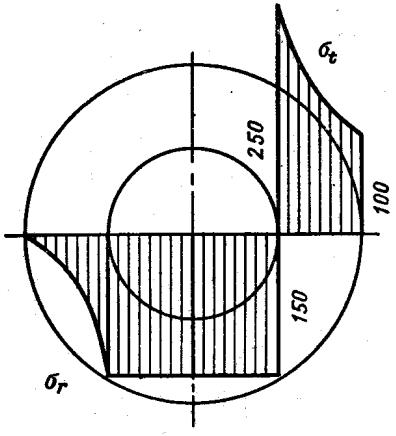


Рис. 146

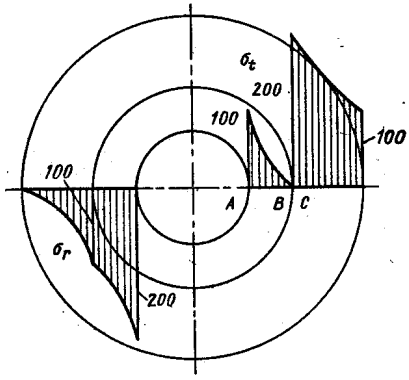


Рис. 147

9.10. $\sigma_{экв} = 106{,}7$ МПа; $n_т < 1$. После усиления конструкции стальным цилиндром $\sigma_{экв} = 88{,}2$ МПа; $n_т = 1{,}02$.

9.11. Эпюра напряжений при действии внутреннего давления показана на рис. 147. Наибольшее эквивалентное напряжение, возникающее в точках A и C, равно $\sigma_{экв} = 300$ МПа; $n_т = 2$. При нагружении внутренним давлением сплошного ствола $n_т = 1{,}3$.

9.12. Напряженное состояние пробки и кольца в точках A, B и C показано на рис. 148. Интересно отметить, что контактное давление $p_к$ больше давления всестороннего сжатия p.

9.13 *. $n_т < 1$; $n = 1{,}2$. Коэффициент запаса по несущей способности n равен отношению предельного давления $p_{пр}$ к рабочему p. В данной задаче $p_{пр} = 465$ МПа. Радиус поверхности, отделяющей упругую зону от пластичной, $r_т = 2{,}85$ мм.

9.14. При давлении p_1 перемещения $u_1 = 0{,}0433$ мм; $u_2 = 0{,}0216$ мм; при давлении $p_{пр}$ перемещения $u_1 = 0{,}1732$ мм; $u_2 = 0{,}0866$ мм.

---

* При решении задач этого параграфа использованы зависимости теории малых упруго-пластических деформаций, приведенные, например, в книге Н. Н. Малинина «Прикладная теория пластичности и ползучести», изд. 2, М., Машиностроение, 1975, гл. VI.

9.15. Эпюры напряжений σ при предельном давлении и $\sigma_{ост}$ после разгрузки показаны на рис. 149. Предельное давление $p_{пр} = 480$ МПа. Напряжения при нагрузке определяем по формулам

$$\sigma_r = \frac{\sigma_т}{\sqrt{3}} 2 \ln \frac{r}{r_2};$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_т}{\sqrt{3}} 2 \left(\ln \frac{r}{r_2} + 1 \right);$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_т}{\sqrt{3}} \left(2 \ln \frac{r}{r_2} + 1 \right).$$

Напряжения разгрузки равны $\sigma_{r_t} = 32 \left(1 \mp \frac{r_2^2}{r^2} \right)$; $\sigma_z = 160$ МПа.

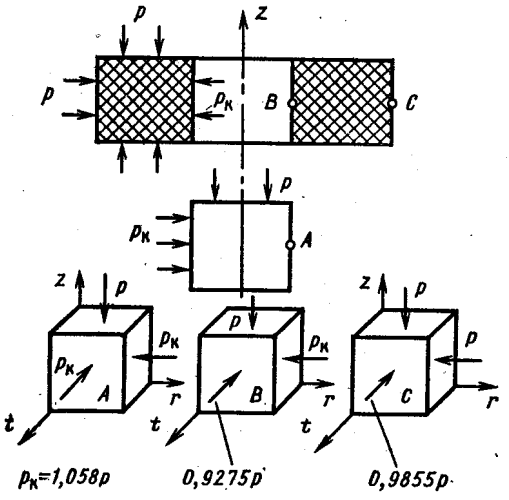


Рис. 148

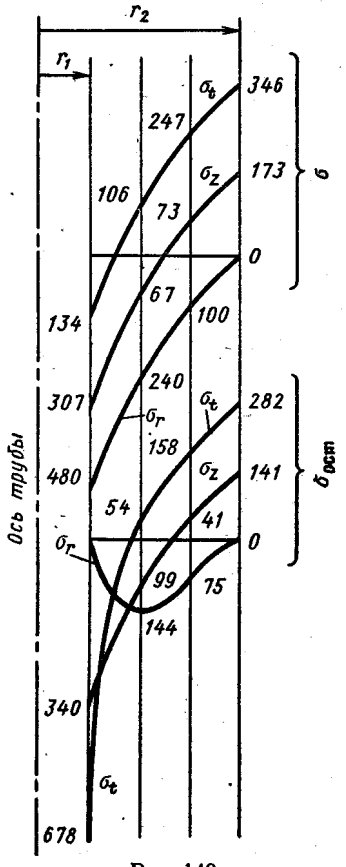


Рис. 149

9.16. Эпюры напряжений показаны на рис. 150; $n_т = 1{,}4$. Давление автофретирования $p = 1{,}121\sigma_т$.

9.17. Эпюры напряжений σ_r и σ_t показаны на рис. 151: *I* — зона упруго-пластических деформаций; *II* — зона упругих деформаций. В пределах упругости наиболее напряженные точки находятся на поверхности отверстия, где $\sigma_{экв} = \sigma_t = 2\sigma_0$, что в данном случае больше предела текучести материала. Следовательно, при заданной величине σ_0 деформации в области, примыкающей к отверстию, пластические, $\sigma_t = \sigma_т$. Радиус границы упругой зоны обозначим $r_т$. Уравнение равновесия $\frac{d}{dr}(r\sigma_r) = \sigma_t$. При $r \ll r_т$ интеграл этого уравнения, с учетом условия текучести,

имеет вид $r\sigma_r = r\sigma_т + C$. Так как при $r = \frac{d}{2}$ $\sigma_r = 0$, то $C = -\frac{1}{2}\sigma_т d$, поэтому $\sigma_r = \sigma_т\left(1 - \frac{d}{2r}\right)$. При $r \geqslant r_т$ деформации упруги, и справедливо «упругое решение» $\sigma_{r\atop t} = A \mp \frac{B}{r^2}$. Для определения постоянных A, B и радиуса $r_т$ имеем три

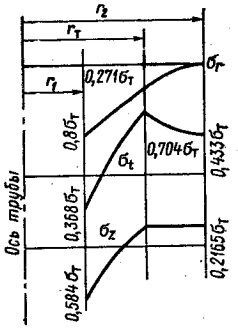


Рис.150.

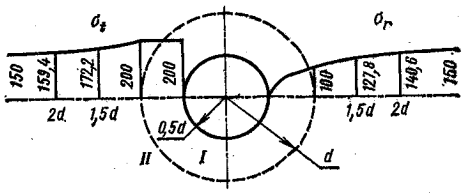


Рис. 151

условия: при $r = r_т$ $\sigma_r^e = \sigma_r^p$ и $\sigma_t^e = \sigma_t^p$, при $r \to \infty$ $\sigma_r \to 0$, где индексами e и p отмечены напряжения соответственно в упругой и пластической областях. Проделав соответствующие преобразования, получим

$$\sigma_{r\atop t} = \sigma_0 \mp \frac{(\sigma_т - \sigma_0) r_т^2}{r^2};$$

$$r_т = \frac{d}{4}\,\frac{\sigma_т}{\sigma_т - \sigma_0}.$$

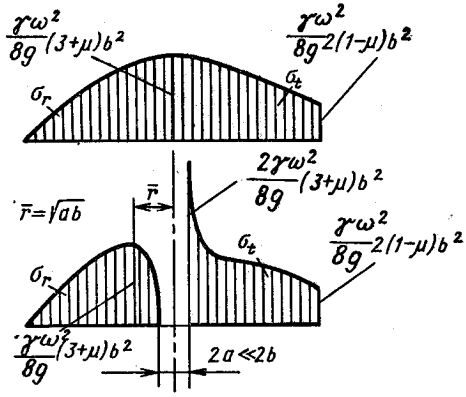


Рис. 152

9.18. $n_т = 1{,}4$.

9.19. $n = 15\,000$ об/мин.

9.20. Напряжение в бандаже $\sigma_t = 93$ МПа, напряжения в диске при $r = R$ равны $\sigma_r = -2{,}05$ МПа; $\sigma_t = -0{,}68$ МПа, в центре диска $\sigma_r = \sigma_t = 1{,}90$ МПа. Без бандажа в центре диска $\sigma_r = \sigma_t = 3{,}95$ МПа; при $r = R$ $\sigma_r = 0$; $\sigma_t = 1{,}40$ МПа. Диск и бандаж нагружены силами инерции и контактным давлением p, которое определяется из условия равенства радиальных перемещений точек поверхности контакта диска и бандажа, $p = 2{,}05$ МПа.

9.21. Эпюры напряжений показаны на рис. 152. Зависимости для напряжений при $a \ll b$ имеют вид

$$\sigma_r = \frac{\rho\omega^2 b^2}{8}(3+\mu)\left(1 - \frac{a^2}{r^2} - \frac{r^2}{b^2}\right);$$

$$\sigma_t = \frac{\rho\omega^2 b^2}{8}(3+\mu)\left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{1+3\mu}{3+\mu}\,\frac{r^2}{b^2}\right).$$

При $r = a$ $\sigma_r = 0$; $\sigma_t = \frac{\rho\omega^2 b^2 (3+\mu)}{4}$;

при $r = b$ $\sigma_r = 0$; $\sigma_t = \frac{\rho\omega^2 b^2 (1-\mu)}{4}$.

В сплошном диске ($a = 0$) меняется закон распределения напряжений в центре, так что при $r = 0$ напряжения $\sigma_r = \sigma_t = \rho\omega^2 b^2 \frac{3+\mu}{8}$. Наличие малого отверстия приводит к концентрации напряжений в зоне отверстия, коэффициент концентрации равен 2.

9.22. Для тонкостенного кольца $a \approx b \approx r \approx R$, поэтому формулы для напряжений σ_r и σ_t во вращающемся диске приводятся к виду $\sigma_r = 0$; $\sigma_t = \rho\omega^2 R^2$.

10.01. Если материал пластичный, наличие неглубоких, но острых надрезов (см. рис. 10.01, *а*, *б*) приводит к появлению больших местных напряжений и образованию небольших зон упругопластических деформаций. Пики напряжений выравниваются, прочность детали в целом меняется незначительно. Если материал хрупкий, около надреза начинают развиваться трещины, разрушающая нагрузка для детали существенно уменьшается.

Наличие отверстий (см. рис. 10.01, *в*) вызывает увеличение напряжений около них (рис. 153), но влияние этих напряжений зависит от соотношения между ними и наибольшими напряжениями, вычисленными по формуле $\sigma = M_x/W_x$.

Отверстие *I* (см. рис. 10.01, *г*) является сильным концентратором

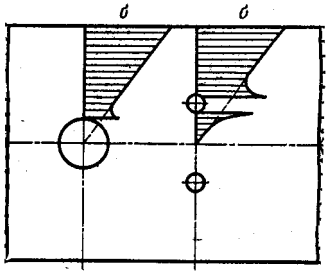


Рис. 153

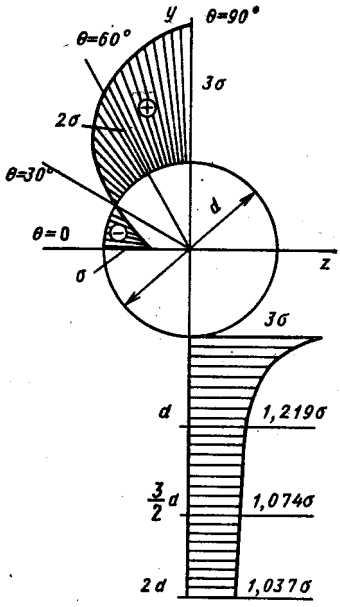


Рис. 154

напряжений (теоретический коэффициент концентрации здесь больше трех), прорез *II* не опасен, концентрация напряжений здесь незначительна.

10.02. Эпюры напряжений показаны на рис. 154; $\alpha = 3$; градиент напряжений $\frac{d\sigma_t}{dr} = -\sigma\left(\frac{d^2}{4r^3} + \frac{3}{8}\frac{d^4}{r^5}\right)$; наибольшее по модулю значение градиента $14\sigma/d$. При $r \gg d$ напряжения $\sigma_t = \frac{\sigma}{2}(1 - \cos 2\theta)$; $\sigma_r = \frac{\sigma}{2}(1 + \cos 2\theta)$; $\tau_{rt} = \frac{\sigma}{2}\sin 2\theta$; главные напряжения $\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

10.03. Наличие пробки уменьшает наибольшее местное растягивающее напряжение σ_z^A в точке A, но вызывает появление сжимающего напряжения σ_y^A в этой точке. Напряжение σ_z^A тем меньше,

а σ_y^A тем больше, чем больше жесткость пробки. Около точки B между пластиной и пробкой образуется зазор.

10.04. $\sigma_{экв}^K = 3\sigma_0 + 2p$; $\sigma_{экв}^L = 2p - \sigma_0$, если $p \geqslant \sigma_0$; $\sigma_{экв}^L = p$, если $\frac{\sigma_0}{2} \leqslant p \leqslant \sigma_0$; $\sigma_{экв}^L = \sigma_0 - p$, если $p \leqslant \frac{\sigma_0}{2}$, градиент $\left|\frac{d\sigma_z}{dr}\right| = 14\frac{\sigma_0}{d} + 4\frac{p}{d}$.

10.05. а) $\frac{d\sigma}{dy} = 13{,}33 \times 10^3$ МПа/м; б) $\frac{d\sigma}{dy} = 467 \times 10^3$ МПа/м.

10.06. Зная нормальные $\sigma = P/F$ и касательные $\tau = M_к/W_к$ напряжения в поперечных сечениях трубки, определяем главные напряжения $\sigma_1 = 117{,}6$ МПа, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -22{,}1$ МПа. Напряженное состояние стенки трубки в окрестности отверстия показано на рис. 155. Используя решение задачи 10.02 и применяя принцип наложения, найдем напряженные состояния в точках A и B (см. рис. 155). В точке A $\sigma_t = 3\sigma_1 - \sigma_3$. В точке B $\sigma_t = -\sigma_1 + 3\sigma_3$. Наибольшее эквивалентное напряжение в точке A, $\sigma_{экв}^{max} = 375$ МПа. В трубке без отверстия $\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = 139{,}7$ МПа. Теоретический коэффициент концентрации напряжений $\alpha = \frac{\sigma_{экв}^{max}}{\sigma_{экв}} = 2{,}68$.

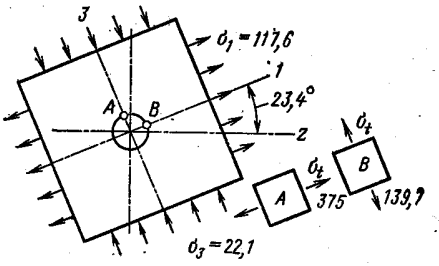


Рис. 155

10.07. При сжатии двух шаров $a = 0{,}324$ мм; $p_{max} = 4538$ МПа; $\delta = 0{,}021$ мм. При обжатии шара на плоскости $a = 0{,}4086$ мм, $p_{max} = 2859$ МПа; $\delta = 0{,}0167$ мм.

11.01. $P_{кр} = \frac{3EI}{al} = 3{,}2$ кН. Условие существования отклоненной формы равновесия стержня AB имеет вид $P_{кр}a = c$, где c — жесткость балки BD, нагруженной в сечении B изгибающим моментом.

11.02. $P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_x}{(4l)^2}$. В системе координат zy (рис. 156) записываем дифференциальное уравнение оси изогнутого стержня $EI_x y'' = -Py - Rz$. С учетом условий равновесия и обозначения $\frac{P}{EI_x} = k^2$ получим $y'' + k^2 y = -k^2 \varphi z$, откуда $y = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz - \varphi z$. Из условия $y = 0$ при $z = 0$ следует $C_1 = 0$; два других условия; $y' = -\varphi$, $y = \varphi l$ при $z = 2l$, приводят к системе уравнений относительно C_2 и φ, наименьший корень которой, отличный от нуля, равен $2kl = \pi/2$.

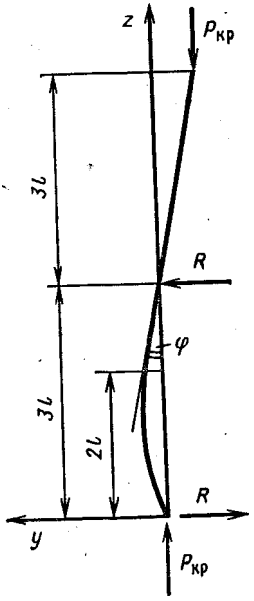


Рис. 156

11.03. Точное решение: а) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(1{,}826l)^2}$; б) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(2{,}634l)^2}$. Приближенное решение: а) $\mu = 1{,}825$; б) $\mu = 2{,}628$.

Рассмотрим систему, показанную на рис. 11.03, *а*. Дифференциальные уравнения участков оси изогнутого стержня (рис. 157, *а*) имеют вид

$$EIy_1'' = -Py_1; \quad EIy_2'' = -Pf.$$

Решения этих уравнений: $y_1 = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz$; $y_2 = C_3 + C_4 z - k^2 f z^2/2$ с учетом граничных условий

$$z = 0 \quad y_1 = 0;$$

$$z = l/2 \quad y_1 = f, \; y_2 = f, \; y_1' = y_2';$$

$$z = l \quad y_2' = 0$$

определяют критическую силу. Из первого условия следует $C_2 = 0$. Определитель системы уравнений относительно неизвестных C_1, C_3, C_4, f имеет вид

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{kl}{2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{l}{2} & -\frac{k^2 l^2}{8} - 1 \\ k\cos\frac{kl}{2} & 0 & -1 & -\frac{k^2 l}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -k^2 l \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель, например, по элементам первой строки и приравнивая его нулю, после некоторых преобразований получим $\operatorname{tg}\frac{kl}{2}=\left(\frac{kl}{2}\right)^{-1}$. Изобразив приближенно на графике вид функций $u=\operatorname{tg}\frac{kl}{2}$ и $u=\left(\frac{kl}{2}\right)^{-1}$ (рис. 157, *б*), возьмем в качестве первого приближения значение корня $\left(\frac{kl}{2}\right)_1=\frac{\pi}{4}$. Для уточнения решения воспользуемся способом последовательных приближений $\operatorname{tg}\left(\frac{kl}{2}\right)_{i+1}=\left(\frac{kl}{2}\right)_i^{-1}$, т. е., задавшись, например, первым значением корня, равным $\pi/4$, определяем угол,

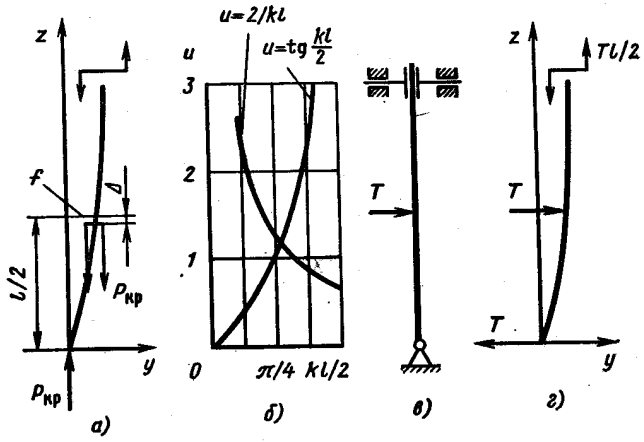


Рис. 157

тангенс которого равен $\pi/4$. Найденное значение угла $\left(\frac{kl}{2}\right)_2=$ $=0{,}9049$ является началом для следующей итерации. Расчет повторяем до получения требуемой точности. В данном случае при $\frac{kl}{2}=0{,}860$ имеем $\operatorname{tg}\frac{kl}{2}=1{,}162$, а правая часть уравнения $\left(\frac{kl}{2}\right)^{-1}=1{,}163$. Дальнейшее уточнение приводит к изменению четвертой значащей цифры величины $\frac{kl}{2}$, поэтому расчет на этом заканчиваем.

Для системы, показанной на рис. 11.03, *б*, уравнение изогнутой оси вертикального стержня (рис. 158, *а*) имеет вид $y=$ $=C_1\cos kz+C_2\sin kz$ при условиях на границе $z=0$, $y=0$; $z=l$ $y'=\theta$, $y=f$. Связь между смещением свободного конца f и углом поворота θ сечения над опорой определяем путем расчета (например, по методу Мора—Верещагина) горизонтальной балки, нагруженной моментом Pf (рис. 158, *б*). Перемещение $\theta=\frac{Pfl}{3EI}$.

Решая систему уравнений относительно неизвестных C_1, C_2, f, получим уравнение $\operatorname{tg} kl = \frac{3}{kl}$, корень которого легко определить с помощью способа последовательных приближений (см. решение задачи 11.02).

Приближенное решение задач получено путем подбора поперечной нагрузки, изгибающей конструкцию подобно тому, как она деформируется при потере устойчивости. Схемы нагружения показаны на рис. 157, *в*, *г* и 158, *в*. Для системы на рис. 11.03, *а* потенциальная энергия деформации $U = \frac{T^2 l^3}{12EI}$, перемещение точки

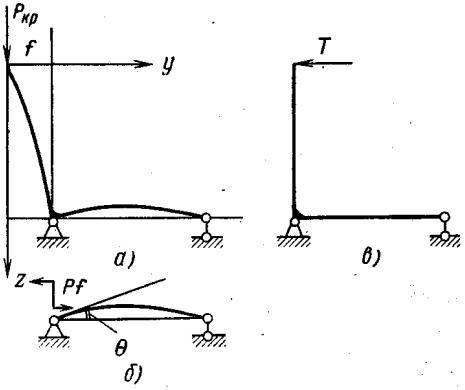


Рис. 158

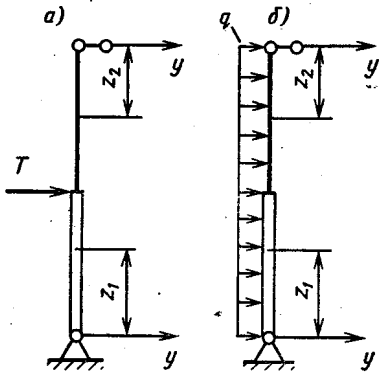


Рис. 159

приложения силы $\Delta = \frac{9}{320}\frac{T^2 l^5}{(EI)^2}$. Для системы на рис. 11.03, *б* $U = \frac{T^2 l^3}{3EI}$, $\Delta = \frac{7}{30}\frac{T^2 l^5}{(EI)^2}$. Критическую силу определяем по формуле $P_{кр} = \frac{U}{\Delta}$.

11.04. Приняв уравнение изогнутой оси в виде $y = a \sin \frac{\pi z}{l}$, получим $\mu = 0{,}632$; если изогнутую ось считать подобной упругой линии балки, нагруженной силой T в середине (рис. 159, *а*), получим $\mu = 0{,}809$; для поперечной нагрузки в виде равномерно распределенных сил (рис. 159, *б*) $\mu = 0{,}817$. Точное значение $\mu = 0{,}822$. Значительное расхождение приближенного решения с точным в первом случае объясняется тем, что функция $y = a \sin \frac{\pi z}{l}$ не отражает особенностей изменения второй производной функции прогибов, которая в среднем сечении терпит разрыв. Вообще, в подобных конструкциях, когда поперечное сечение стойки меняется скачкообразно, приближенное решение задачи с помощью уравнения, удовлетворяющего только условиям закрепления, нежелательно.

Примечание. Для упрощения вычислений рекомендуем записывать дифференциальные уравнения участков оси изогнутой балки в разных системах координат: для нижнего участка начало отсчета над нижней опорой, для верхнего — над верхней (см. рис. 159). Для балки, нагруженной силой T, эти уравнения имеют вид $4EIy_1'' = -\frac{T}{2}z_1$; $EIy_2'' = -\frac{T}{2}z_2$. Постоянные интегрирования определяем из граничных условий: при $z_1 = 0$ $y_1 = 0$; при $z_2 = 0$ $y_2 = 0$ и условий сопряжения участков при $z_1 = z_2 = l/2$ $y_1 = y_2$; $y_1' = -y_2'$.

11.05. Сила уменьшится в 1,18 раза, масса — в 1,33 раза. Задача решена приближенно, уравнение изогнутой оси принято в виде $y = a \sin \frac{\pi z}{2l}$. В результате вычислений получаем

$$U = \frac{\pi^2 a^2 EI}{64l^3}\left(\frac{3}{4}\pi^2 + 1\right); \quad \Delta = \frac{\pi^2 a^2}{16l};$$

$$P_{кр} = 2{,}10\frac{EI}{l^2}.$$

11.06. $l_{кр} = 10{,}43$ м. Задача решена приближенно, уравнение изогнутой оси принято в виде $y = a \sin \frac{\pi z}{l}$; соответствующие расчеты приводят к зависимости $l_{кр} = \sqrt[3]{\frac{2\pi^2 EI}{q}}$.

11.07. Критическую силу определяем, решая уравнения $\operatorname{tg} kl = \frac{kl}{1 + (kl)^2 \frac{EI}{cl}}$, где $k^2 = \frac{P}{EI}$. Очевидно, что при $c \to 0$ (шарнирная опора) $\operatorname{tg} kl \to 0$, $\mu \to 1$. При $c \to \infty$ (абсолютно жесткое основание) $\operatorname{tg} kl \to kl$, $\mu \to 0{,}7$. Для получения расчетной зависимости запишем дифференциальное уравнение оси изогнутой стойки в системе координат, показанной на рис. 160: $EIy'' = -Py + Rz$. Причем $Rl = M_0$, поэтому $R = c\varphi/l$. Постоянные интегрирования определяем из граничных условий: при $z = 0$ $y = 0$; при $z = l$ $y = 0$; $y' = -\varphi$.

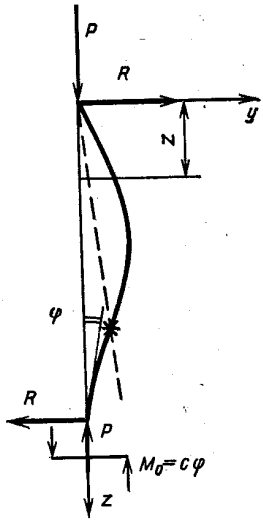


Рис. 160

11.08. При $EI_1 = EI_2$ критическая сила $P_{кр} = 7{,}28\frac{EI_1}{(2l)^2}$. Для определения $P_{кр}$ следует исследовать две возможные формы потери устойчивости: симметричную и кососимметричную. Дифференциальное уравнение изогнутой оси симметричной формы (рис. 161, *а*) имеет вид $EI_1 y'' = -Py + \mathcal{M}$. Связь между изгибающим моментом $\mathcal{M}$ и углом поворота φ определяется жесткостью горизонтальной части конструкции (рис. 161, *б*). Применяя метод Мора—Верещагина, находим $\varphi = \frac{Ml}{2EI_2}$. Выполняя граничные условия: при $z = 0$ $y = 0$, $y' = \varphi$; при $z = l$ $y' = 0$, после неко-

торых преобразований находим $\operatorname{tg} kl = -\frac{kl}{2}\frac{EI_1}{EI_2}$, откуда следует: при $EI_2 \to \infty$ $\operatorname{tg} kl \to 0$, $P_{кр} \to \frac{\pi^2 EI_1}{(0{,}5 \cdot 2l)^2}$; при $EI_2 \to 0$ $\operatorname{tg} kl \to \infty$, $P_{кр} \to \frac{\pi^2 EI_1}{(2l)^2}$. При $EI_1 = EI_2$ $\operatorname{tg} kl = -\frac{kl}{2}$; $kl = 2{,}29$; $P_{кр} = 21{,}0\frac{EI}{(2l)^2}$ (описание применения метода последовательных приближений для решения подобных уравнений дано в решении задачи 11.02).

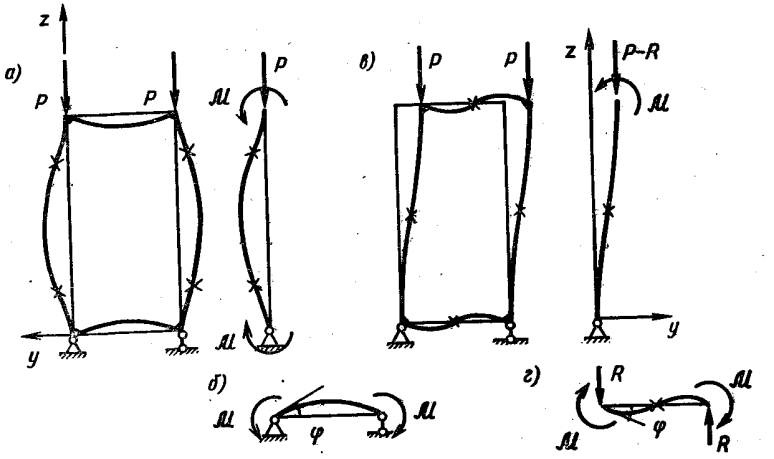


Рис. 161

Для кососимметричной формы потери устойчивости (рис. 161, *в*) $EI_1 y'' = \mathcal{M} - Py$. Реакцию R как величину высшего порядка малости в уравнениях не учитываем. Граничные условия: при $z = 0$ $y = 0$, $y' = \varphi$; при $z = l$ $y'' = 0$ с учетом зависимости $\varphi = \frac{\mathcal{M}l}{6EI_2}$ (схема нагружения горизонтальной части конструкции показана на рис. 161, *г*) приводят к уравнению $\operatorname{tg} kl = \frac{6}{kl}\frac{EI_2}{EI_1}$. Таким образом, при $EI_2 \to 0$ $\operatorname{tg} kl \to 0$, $\mu \to 0{,}5$; при $EI_2 \to \infty$ $\operatorname{tg} kl \to \infty$; $\mu \to 1$. При $EI_1 = EI_2$ $\operatorname{tg} kl = \frac{6}{kl}$, $kl = 1{,}3495$, $P_{кр} = 7{,}28\frac{EI}{(2l)^2}$. Сравнивая значения критической силы при симметричной и кососимметричной формах потери устойчивости, приходим к выводу, что при $EI_1 = EI_2$ $P_{кр} = 7{,}28\frac{EI}{(2l)^2}$, $\mu = 1{,}355$, т. е. реализуется кососимметричная форма изгиба.

11.09. а) $T_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(k + 0{,}5)l^2}$; $P_{кр} = \frac{k\pi^2 EI}{(k + 0{,}5)\,l^2}$; б) $P_{кр} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2 EI}{l^2}$; в) $T_{кр} = \frac{3}{2}\frac{\pi^2 EI}{l^2}$.

11.10. $\Phi_{кр} = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{a^3EI}{4k}}$. Предположим, что по какой-то причине стержень несколько изогнулся. Тогда он будет нагружен неравномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = k\Phi^2 \frac{4ay}{(a^2-y^2)^2} \approx \frac{4k\Phi^2 y}{a^3}$ (рис. 162), а дифференциальное уравнение изогнутой оси можно записать в виде $EIy^{IV} = \frac{4k\Phi^2}{a^3} y$ (так как $EIy^{IV} = q$), откуда $y = C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z + C_3 \operatorname{sh} \alpha z + C_4 \operatorname{ch} \alpha z$, где $\alpha^4 = \frac{4k\Phi^2}{a^3EI}$. Удовлетворяя граничным условиям: при $z = 0$ $y = 0$, $y'' = 0$; при $z = l$ $y = 0$, $y'' = 0$, получим $\sin \alpha l \operatorname{sh} \alpha l = 0$. Наименьший ненулевой корень этого уравнения $\alpha l = \pi$, и, следовательно, $\frac{4k\Phi_{кр}^2}{a^3EI} = \frac{\pi^4}{l^4}$.

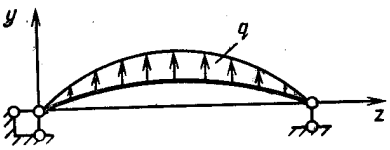


Рис. 162

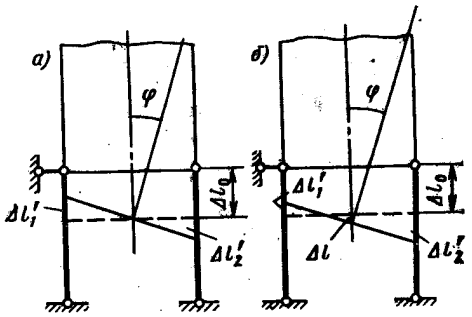


Рис. 163

11.11. $\omega_{кр} = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{EI}{\rho F}} = 147{,}9$ м/с (I — осевой момент инерции поперечного сечения трубки; ρ — плотность жидкости). Изогнутая в результате некоторого внешнего воздействия трубка оказывается нагруженной центробежными силами инерции жидкости $q = \rho F\omega^2/r$, где F — площадь трубки «в свету». Но $\frac{1}{r} \approx y''$ $EIy^{IV} = -q$, поэтому $EIy^{IV} = -\rho F\omega^2 y''$. Введя обозначение $\frac{\rho F\omega^2}{EI} = k^2$, получим уравнение $y^{IV} + ky'' = 0$, откуда $y = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz + C_3 z + C_4$. С учетом граничных условий: при $z = 0$ $y = 0$, $y' = 0$; при $z = l$ $y = 0$, $y' = 0$, получим $\sin \frac{kl}{2}\left(2\sin\frac{kl}{2} - kl\cos\frac{kl}{2}\right) = 0$. Наименьший ненулевой корень этого уравнения $\frac{kl}{2} = \pi$, следовательно, $\omega_{кр} = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{EI}{\rho F}}$.

11.12. В пределах упругости $P_{кр} = P_* = \frac{b^2EF}{2al}$; за пределами упругости $P_{кр} = \frac{\nu E}{1+\nu}\frac{b^2F}{al}$; $P_* = \frac{\nu Eb^2F}{2al}$.

Пусть брус нагружен силой P, опорные стержни при этом укоротились на величину Δl_0 (рис. 163, *а*). Если брус отклонить от

вертикального положения на малый угол φ, то правый стержень получит дополнительную деформацию сжатия $\Delta l_2'$, а укорочение левого стержня уменьшится на величину $\Delta l_1'$. Усилия в стержнях изменятся на ΔN_1 и ΔN_2. Так как в пределах упругости законы нагрузки и разгрузки одинаковы, а изменение силы, действующей на стержень, равно нулю, то $\Delta l_1' = \Delta l_2' = \varphi b/2$, $\Delta N_1 = \Delta N_2 = \frac{\varphi bEF}{2a}$.

Уравнение равновесия бруса в отклоненном положении $Pl\varphi = \frac{\varphi bEF}{2a} b$ определяет критическое значение силы $P_{кр} = \frac{b^2EF}{2al}$. За пределами упругости законы нагрузки и разгрузки различны, но $\Delta P = 0$, поэтому $\Delta N_1 = \Delta N_2$, а $\Delta l_1' \neq \Delta l_2'$. Изменения длин опорных стержней при повороте бруса на угол φ можно представить в виде $\Delta l_1' = -\Delta l + \frac{\varphi b}{2}$; $\Delta l_2' = \Delta l + \frac{\varphi b}{2}$ (рис. 163, *б*). Изменения усилий определяем по формулам $\Delta N_1 = \left(\frac{\varphi b}{2} - \Delta l\right)\frac{EF}{a}$; $\Delta N_2 = \left(\frac{\varphi b}{2} + \Delta l\right)\frac{\nu EF}{a}$. Из условия равенства $\Delta N_1 = \Delta N_2$ найдем $\Delta l = \frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{\varphi b}{2}$, и выразим изменения усилий через угол φ. В результате получим $\Delta N_1 = \Delta N_2 = \frac{\nu E}{1+\nu}\frac{Fb}{a}\varphi$.

Уравнение равновесия $Pl\varphi = \frac{\nu E}{1+\nu}\frac{Fb^2}{a}\varphi$ определяет условие существования отклоненной формы равновесия бруса $P_{кр} = \frac{\nu E}{1+\nu}\frac{Fb^2}{al}$.

Во втором случае предполагаем, что увеличение сжимающей силы на ΔP приводит к возникновению возможных соседних форм равновесия бруса. Найдем наименьшее значение $P = P_*$, при котором могут быть реализованы поставленные условия. Рассмотрим брус, нагруженный силой $P = P_+ > P_*$. Деформация опорных стержней, вызванная этой силой, равна Δl_0. Увеличим силу на ΔP и отклоним брус на малый угол φ. Деформации стержней изменятся на $\Delta l_1' = \frac{\varphi b}{2} - \Delta l$ и $\Delta l_2' = \frac{\varphi b}{2} + \Delta l$, усилия в них на ΔN_1 и ΔN_2, причем $\Delta N_1 + \Delta N_2 = \Delta P$. В пределах упругости

$$\Delta N_1 = \left(\frac{\varphi b}{2} - \Delta l\right)\frac{EF}{a}; \quad \Delta N_2 = \left(\frac{\varphi b}{2} + \Delta l\right)\frac{EF}{a}.$$

Уравнение равновесия имеет вид $(P_+ + \Delta P)\, l\varphi = \frac{EFb^2}{2a}\varphi$, откуда $P_* = \frac{EFb^2}{2al} = P_{кр}$. Как и следовало ожидать, в пределах упругости критическая сила не зависит от истории нагружения. За пределами упругости $\Delta N_1 = \left(\frac{\varphi b}{2} - \Delta l\right)\frac{EF}{a}$; $\Delta N_2 = \left(\frac{\varphi b}{2} + \Delta l\right)\frac{\nu EF}{a}$;

$$\Delta P = -\frac{\varphi b}{2}\frac{EF}{a}(1-\nu) + \Delta l\frac{EF}{a}(1+\nu). \qquad (1)$$

Уравнение равновесия

$$(P_+ + \Delta P)\, l\varphi = \frac{\varphi b^2 EF}{4a}(1+\nu) - \Delta l \frac{EFb}{2a}(1-\gamma). \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) выражаем φ и Δl и записываем условие разгрузки левого стержня $\varphi b/2 \geqslant \Delta l$, откуда получаем $P_+ + \Delta P \geqslant \geqslant \nu \frac{b^2 EF}{2al}$ и, следовательно, $P_* = \frac{\nu E b^2 F}{2al}$. Таким образом, за пределами упругости определение критической силы зависит от того, считаем ли мы, что до $P = P_{кр}$ стержень остается вертикальным и только при $P = P_{кр}$ он может терять устойчивость, или же, постепенно увеличивая нагрузку, мы каждый раз исследуем возможность потери устойчивости.

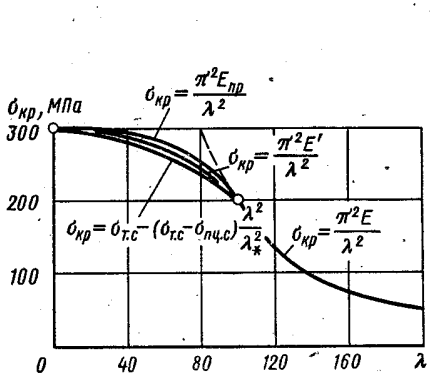


Рис. 164

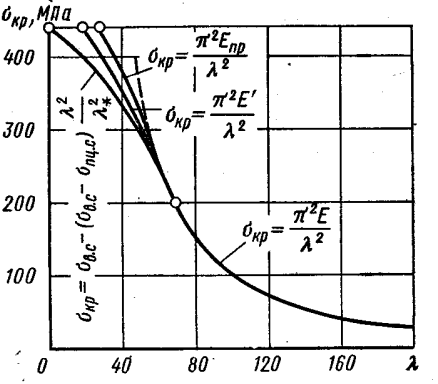


Рис. 165

11.13. См. рис. 164; $\lambda_* = 99{,}3$. Для определения зависимости $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ при $\lambda < \lambda_*$ рекомендуем задаться значениями деформации $\varepsilon = 0{,}001;\ 0{,}0012;\ 0{,}0014;\ 0{,}0016;\ 0{,}0018;\ 0{,}002$, по характеристике материала определить $\sigma_{кр}$ и E' или $E_{пр}$, по формулам Шенли или Энгессера—Кармана подсчитать соответствующие значения λ. Расчет по приближенной формуле удобно вести, задаваясь значениями λ и вычисляя $\sigma_{кр}$.

11.14. См. рис. 165; $\lambda_* = 70{,}2$. Указания по построению кривых см. в решении задачи 11.13 (рекомендуемые значения деформации $\varepsilon = 0{,}002;\ 0{,}003;\ 0{,}004;\ 0{,}005;\ 0{,}006$).

11.15. а) $n = 4{,}8$; б) $n = 5{,}7$.

Расчетная схема для случая а показана на рис. 166, *а*. Дифференциальное уравнение изогнутой оси имеет вид: на первом участке $EIy_1'' = -Py_1 + \frac{R}{3} z_1$, на втором участке $EIy_2'' = Rz_2$, откуда $y_1 = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz + \frac{R}{3P} z_1$; $y_2 = D + C_3 z_2 + \frac{R}{EI} \times \times \frac{z_2^3}{6}$. Так как при $z_1 = 0$ $y_1 = 0$, при $z_2 = 0$ $y_2 = 0$, постоянные C_1 и D равны нулю.

Выполнение остальных граничных условий $\left(\text{при } z_1 = \frac{3}{4}\,l\right.$ $y_1 = 0$; при $z_2 = \frac{1}{4}\,l$ $y_2 = 0$; при $z_1 = \frac{3}{4}\,l$ и $z_2 = \frac{1}{4}\,l$ $\left.y_1' = -y_2'\right)$ приводит к уравнению

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{3}{4}kl & 0 & \frac{l}{4P} \\ 0 & \frac{l}{4} & \frac{l^3}{64\cdot 6\cdot EI} \\ k\cos\frac{3}{4}kl & 1 & \frac{1}{3P}+\frac{l^2}{32EI} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда находим

$$\operatorname{tg}\frac{3}{4}\,kl = \frac{9\left(\frac{3}{4}\,kl\right)}{9+\left(\frac{3}{4}\,kl\right)^2}.$$

Решая методом последовательных приближений $\left(\left[\frac{3}{4}\,kl\right]_1 = 4\right)$, получим $\frac{3}{4}\,kl = 4{,}102$ и $P_{кр} = 29{,}9EI/l^2 = 16{,}82 \times \times EI/b^2$. В случае б (см. рис. 166, *б*) $\mu = 0{,}7$; $P_{кр} = \pi^2 EI/(0{,}7b)^2$. В обоих случаях $\sigma_{кр} < \sigma_{пц.\,с}$.

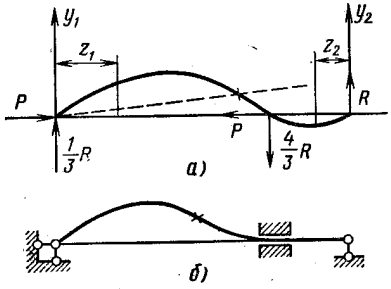


Рис. 166

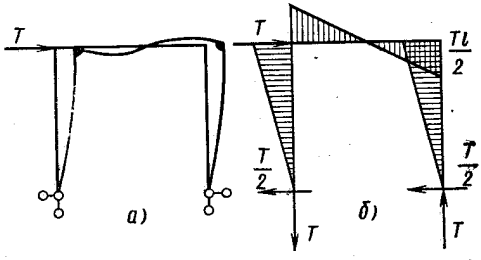


Рис. 167

11.16. $l : h = \pi/\sqrt{12\alpha t} = 40{,}6$. Размер b можно выбирать произвольно, но при этом следует помнить о том, что расчет ведется по схеме бруса, поэтому $b \ll l$.

11.17. $h = 4$ мм, $b = 20$ мм. Критическую силу определяем приближенно, считая, что форма потери устойчивости подобна оси изогнутой рамы, нагруженной как показано на рис. 167, *а*. Эпюру изгибающих моментов легко построить, если учесть, что рама кососимметрична (рис. 167, *б*). Энергия деформации $U = \frac{T^2 l^3}{8EI}$, перемещение силы P при потере устойчивости $\Delta = \frac{49}{32\cdot 45}\,\frac{T^2 l^5}{(EI)^2}$, откуда $P_{кр} = 3{,}67EI/l^2$.

11.18. $i_* = 12$ витков. Критическую силу при потере устойчивости в плоскости чертежа определяем, решая уравнение $EI_x y'' = P(f_0 - y) - cf_0(l - z)$ с учетом граничных условий: при $z = 0$ $y = 0$, $y' = 0$; при $z = l$ $y = f_0$. Обозначив $\frac{P}{EI_x} = k^2$, после соответствующих преобразований получим $\operatorname{tg} kl = kl - \frac{kP}{c}$ и $c = \frac{kP}{kl - \operatorname{tg} kl}$ (1). В плоскости zx критическая сила $P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_y}{(2l)^2} = 3290$ Н, откуда $k = \sqrt{\frac{P_{кр}}{EI_x}} = 12{,}56$. Подставляя k в уравнение (1), найдем $c = 13{,}15$ кН/м, по формулам расчета пружин подсчитаем i_*.

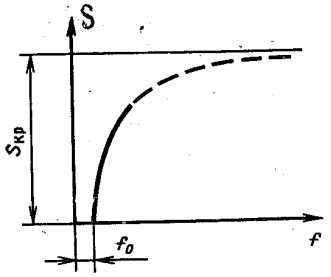


Рис. 168

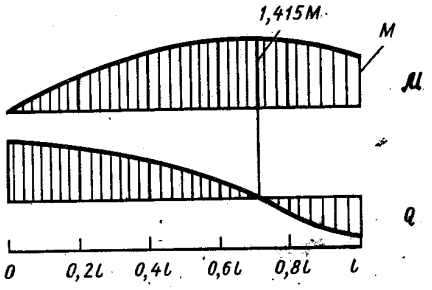


Рис. 169

11.19. $I_x = I_y = 295$ см^4; $I_{min} = 255{,}5$ см^4; $a = 20{,}9$ мм.

11.20. $h = 4b$.

11.21. $h = 2b$ в обоих случаях.

11.22. $P_{доп} = 825$ кН; $n = 3{,}2$ $(\lambda_* > \lambda)$.

11.23. $D = 67$ мм $(\sigma_{кр} < \sigma_{пц.\,с})$.

11.24. $l = 0{,}547$ м, принимаем $l = 0{,}5$ м; $n = 1{,}8$ $(\lambda_* > \lambda)$.

11.25. $b = 114$ мм; $l = 1{,}15$ м (принимаем $l = 1$ м); $P_{доп} = 621$ кН. Размер b определяем из условия равенства моментов инерции сечения относительно главных центральных осей.

11.26. $f = \frac{M}{S}\frac{1 - \cos kl}{\cos kl}$, где $k = \sqrt{\frac{S}{EI_x}}$. При $S \to 0$ $k \to 0$; при малых k $1 - \cos kl = 2\sin^2 kl/2 = (kl)^2/2$, поэтому $\cos kl = 1 - (kl)^2/2$. Подставляя в формулу для f, получим $f = \frac{Ml^2}{2EI_x} \times \frac{1}{1 - (kl)^2/2}$. При $k \to 0$ $f \to f_0 = \frac{Ml^2}{2EI_x}$, последнее есть прогиб свободного конца заданной балки при $S = 0$. Прогиб $f \to \infty$, если $\cos kl \to 0$ или $kl \to \pi/2$, т. е. при $S = \frac{\pi^2 EI_x}{4l^2}$, что равно критической силе для заданной балки при потере устойчивости в плоскости zy. Зависимость $f(S)$ показана на рис. 168.

11.27. Эпюры Q и $\mathcal{M}$, полученные интегрированием дифференциального уравнения оси изогнутой балки, показаны на рис. 169.

Дифференциальное уравнение (рис. 11.27) имеет вид $EI_x y'' = -Sy - \frac{M}{l} z$. После интегрирования, с учетом граничных условий, получим $y = \frac{M}{S}\left(\frac{\sin kz}{\sin kl} - \frac{z}{l}\right)$. Изгибающий момент $\mathcal{M} = -EI_x y'' = M\frac{\sin kz}{\sin kl}$, поперечная сила $Q = \frac{d\mathcal{M}}{dz} = M\frac{k\cos kz}{\sin kl}$. Момент экстремален при $\cos kz_* = 0$, откуда $z_* = 2{,}67$ м, $\mathcal{M}_{max} = 1{,}415M$, $\sigma_{max} = \frac{\mathcal{M}_{max}}{W_x} + \frac{S}{F} = 189{,}1$ МПа (сжатие).

Поперечная сила: при $z = 0$ $Q = 1251$ Н, при $z = l$ $Q = -885$ Н.

Приближенно напряжение сжатия определяем по формуле $\sigma = \frac{S}{F} + \frac{\mathcal{M}_{пп}}{W_x}$, где $\mathcal{M}_{пп} = Sy_{пп} + \mathcal{M}_п$; $\mathcal{M}_п$ — изгибающий момент, вызываемый действием поперечной нагрузки; $y_{пп} = \beta y_п$ —

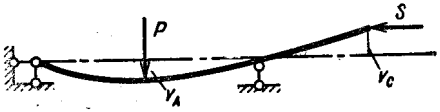


Рис. 170

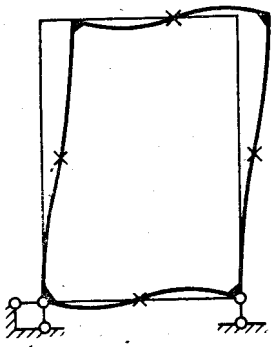


Рис. 171

прогиб при действии продольно-поперечной нагрузки; $y_п$ — прогиб под действием поперечной нагрузки; $\beta = \frac{1}{1 - S/S_{эйл}}$; $S_{эйл} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2}$. Определяя прогиб $y_п$ с помощью дифференциального уравнения оси изогнутой балки при поперечной нагрузке, получим $\mathcal{M}_{пп} = \frac{M}{l} z + \beta S \frac{1}{EI_x}\left(\frac{Ml}{6} z - \frac{M}{l}\frac{z^3}{6}\right)$.

Функция $\mathcal{M}_{пп}$ экстремальна при $z_* = 2{,}80$ м; $\mathcal{M}_{max} = 1{,}456\,M$; $\sigma_{max} = 193{,}4$ МПа.

11.28. Существуют различные подходы к приближенному расчету балок при продольно-поперечном изгибе, дающие разные степени точности. В первом приближении в учебнике В. И. Феодосьева «Сопротивление материалов» предлагается формула $\mathcal{M}_{пп} = \beta\mathcal{M}_п$. В данном случае $\beta = 1{,}903$; $\mathcal{M}^A_{пп} = 50{,}0$ Н·м; $\mathcal{M}^B_{пп} = 0$. Лучший результат дает зависимость, полученная на основе уравнения равновесия, записанного для деформированной системы (рис. 170), $\mathcal{M}^A_{пп} = \frac{Pl}{2} + S\left(\frac{v_C}{2} + v_A\right)$; $\mathcal{M}^B_{пп} = Sv_C$, где $v_C = v^C_п\beta$; $v_A = v^A_п\beta$.

Прогибы $v^C_п$ и $v^A_п$ при поперечном изгибе могут быть определены по методу Мора—Верещагина. В данном случае $v^A_п = \frac{Pl^3}{6EI_x} = 1{,}706\cdot10^{-3}$ м; $v^C_п = \frac{Pl^3}{4EI_x} = 2{,}56\cdot10^{-3}$ м. Подставляя

эти значения в формулу для изгибающего момента, получим $\mathcal{M}^A_{\text{пп}} = 37{,}6$ Н·м; $\mathcal{M}^B_{\text{пп}} = 9{,}74$ Н·м. Точное решение задачи дает $\mathcal{M}^A_{\text{пп}} = 36{,}8$ Н·м; $\mathcal{M}^B_{\text{пп}} = 10{,}62$ Н·м.

11.29. Форма изогнутой оси показана на рис. 171 (* — точки перегиба). Перемещения равны: а) $\delta_A = 1{,}8$ мм; $\theta_A = 0{,}003$ рад; б) $\delta_A = 3{,}81$ мм; $\theta_A = 0{,}00634$ рад. Перемещения при продольно-поперечном изгибе определяем умножая соответствующие перемещения при поперечном изгибе на коэффициент $\beta = \frac{1}{1 - S/S_{\text{эйл}}}$.

Величина $S_{\text{эйл}}$ определена в решении задачи 11.08. Перемещения при поперечном изгибе определяем методом Мора — Верещагина: $\delta^A_{\text{п}} = \frac{Pl^3}{2EI_x}$; $\theta^A_{\text{п}} = \frac{Pl^2}{12EI_x}$.

11.30. $S = 4{,}35$ кН. Дифференциальное уравнение изогнутой оси (см. рис. 11.30) в данном случае имеет вид $EI_x y'' = Sy - M$, откуда $y = C_1 \operatorname{sh} kl + C_2 \operatorname{ch} kl + \frac{M}{S}$. С учетом условий: при $z = 0$ $y = 0$; при $z = l$ $y = 0$, получим $y = \frac{M}{S}\left(\frac{\operatorname{ch} kl - 1}{\operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kz - \right.$ $\left. - \operatorname{ch} kz + 1\right)$. Наибольший прогиб $y_{\max}$ имеет место при $z = l/2$ и равен $y_{\max} = \frac{M}{S} \frac{\operatorname{ch} \frac{kl}{2} - 1}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}}$. При $S = 0$ наибольший прогиб y_0 был равен $y_0 = Ml^2/8EI_x$, что можно определить, например, по методу Мора—Верещагина. По условию задачи $y_0/y_{\max} = 2$, откуда после некоторых преобразований получим $\operatorname{ch} \frac{kl}{2} = \frac{4}{4 - \left(\frac{kl}{2}\right)^2}$.

Решение последнего уравнения $kl/2 = 1{,}536$ определяет продольную силу S_*.

11.31. а) $n_{\text{т}} = 1{,}85$; б) $n_{\text{т}} = 3{,}37$; в) $n_{\text{т}} = 2{,}52$. В конструкциях, где напряжения непропорциональны нагрузкам, под коэффициентом запаса по текучести естественно понимать число, показывающее, во сколько раз нужно увеличить нагрузку, чтобы $\sigma_{\max} = \sigma_{\text{т}}$. В данном случае $\sigma_{\max} = \frac{M}{\cos \frac{kl}{2} W_x} + \frac{S}{F}$, где $\frac{M}{\cos \frac{kl}{2}} = \mathcal{M}_{\max}$ определено с помощью уравнения оси изогнутого стержня. Коэффициент запаса $n_{\text{т}}$ вычисляем, решая уравнение, которое имеет вид:

$$\text{а) } \sigma_{\text{т}} = \frac{n_{\text{т}} M}{\cos \frac{k_{\text{т}} l}{2} W_x} + \frac{n_{\text{т}} S}{F}; \quad \text{б) } \sigma_{\text{т}} = \frac{n_{\text{т}} M}{\cos \frac{kl}{2} W_x} + \frac{S}{F};$$

$$\text{в) } \sigma_{\text{т}} = \frac{M}{\cos \frac{k_{\text{т}} l}{2} W_x} + \frac{n_{\text{т}} S}{F}, \text{ где } k_{\text{т}} = \sqrt{\frac{n_{\text{т}} S}{EI_x}}.$$

Уравнения в случаях а и в решаем подбором, в случае б $n_т = \frac{\sigma_т - \frac{S}{F}}{M} W_x \cos\frac{kl}{2}$.

11.32. $n = 4$; $n_т = 1{,}37$. Наибольшее напряжение сжатия σ_{max} равно $\sigma_{max} = \frac{Pl/20 + v_{пп}}{W_x} + \frac{P}{F}$, где $v_{пп} = \beta v_п$, $\beta = \frac{1}{1 - S/S_{эйл}}$. По методу Мора—Верещагина находим $v_п = 13{,}84$ мм; $S_{эйл} = \frac{\pi^2 E I_x}{l^2} = 355$ кН; $\sigma_{max} = 209$ МПа. Коэффициент запаса вычисляем, решая уравнение $\sigma_т = \frac{\frac{n_т Pl}{20} + n_т^2 P \beta_т v_п}{W_x} + \frac{n_т S}{F}$, где $\beta_т = \frac{1}{1 - \frac{n_т S}{S_{эйл}}}$ (см. решение задачи 11.31).

11.33. $n_т = 2{,}25$. Коэффициент запаса определяем из уравнения

$$\sigma_т = \frac{M_п}{W_x} + \frac{n_т S \beta_т v_п}{W_x} + \frac{n_т S}{F}, \text{ где } \beta_т = \frac{1}{1 - \frac{n_т S}{S_{эйл}}}$$

(см. пояснения к решению задачи 11.31). Наиболее напряженное сечение находится в середине пролета: $v_п = \frac{ql^4}{384 E I_x}$.

ГЛАВА 12

12.01. Кривая усталости изображена на рис. 172; предел выносливости 260 МПа $< \sigma_{-1} <$ 264 МПа; показатель степени $k = 19$.

12.02. Диаграмма предельных амплитуд дана на рис. 173, коэффициенты асимметрии r и пределы выносливости σ_r равны: 1) $r = -1$, $\sigma_r = 380$ МПа; 2) $r = -0{,}245$; $\sigma_r = 530$ МПа; 3) $r = 0{,}212$; $\sigma_r = 660$ МПа; 4) $r = 0{,}408$; $\sigma_r = 710$ МПа.

12.03. $n_\tau = 4{,}1$; $n_r = 1{,}5$. В расчете принято: $\nu_\sigma = 0{,}06$ ([1], стр. 410); $\alpha_\sigma = 2$ ([2], стр. 455, рис. 57); $\beta = 0{,}92$ ([1], стр. 412,

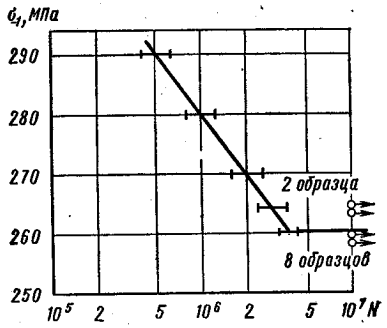


Рис. 172

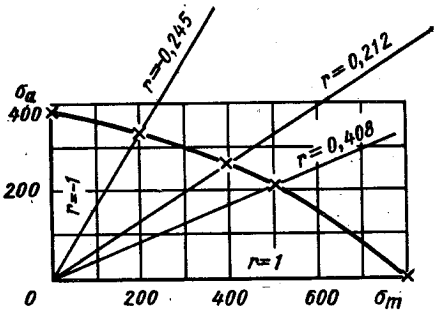


Рис. 173

рис. 468). Эффективный коэффициент концентрации детали $K_{\sigma д}$ вычислен по формуле $K_{\sigma д} = \dfrac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta}$.

12.04. $n_\tau = 3{,}6$; $n_r = 3{,}4$. В расчете принято: $\alpha_\tau = 1{,}3$ ([2], стр. 456, рис. 58); $\nu_\tau = 0{,}21$ ([1], стр. 410); $\beta = 0{,}95$ ([1], стр. 412, рис. 468). Эффективный коэффициент концентрации детали $K_{\tau д}$ вычислен по формуле $K_{\tau д} = \dfrac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \beta}$.

12.05. $n_\tau = 4{,}7$; $n_r = 4{,}3$. В расчете принято: $\alpha_\sigma = 1{,}5$ ([2], стр. 449, рис. 44); $\nu_\sigma = 0{,}06$ ([1], стр. 410); $\alpha_\tau = 1{,}35$ ([2], стр. 450, рис. 47); $\nu_\tau = 0{,}105$ ([1], стр. 410); $\beta = 1{,}3$ ([1], стр. 413, табл. 10); $\psi_\tau = 0{,}13$ ([1], стр. 401). Эффективные коэффициенты концентрации детали вычислены по формулам $K_{\sigma д} = \dfrac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta}$; $K_{\tau д} = \dfrac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \beta}$.

12.06. $n_\tau = 2{,}8$; $n_r = 1{,}1$. В расчете принято: $\dfrac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma} = 2{,}4$ ([2], стр. 468, рис. 71); $\beta = 0{,}85$ ([1], стр. 412, рис. 468); $\psi_\sigma = 0{,}25$ ([1], стр. 401). Эффективный коэффициент концентрации детали вычислен по формуле $K_{\sigma д} = \dfrac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta}$.

12.07. 1. При уменьшении времени разгона напряжения увеличиваются, циклы остаются подобными, $n_r = OB/OA$ (рис. 174, *а*).

2. Увеличение частоты вращения двигателя вызывает увеличение динамической нагрузки, а следовательно, и амплитуды цикла напряжений в балке. Постоянная составляющая напряжений остается неизменной. Коэффициент запаса усталостной прочности в этом случае естественно вычислять по формуле $n_r = \frac{OC + BC}{OC + CA}$ (рис. 174, *б*).

3. Нормальные напряжения в поперечных сечениях вала червяка изменяются по симметричному циклу, касательные постоянны. На рис. 174, *в* изображены диаграммы предельных амплитуд для нормальных и касательных напряжений, точкам A соответствует рабочий режим. При форсировании режима момент M и напряжения увеличиваются, циклы остаются подобными, но при $M = M_*$ (точка C на диаграммах) происходит срез шпильки, усталостное разрушение вала червяка невозможно. Для условной оценки коэффициента запаса по усталостной прочности в качестве предельных можно принять циклы, изображаемые точками B (рис. 174, *в*), и воспользоваться зависимостями $n_{r\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{max}} = \frac{OB}{OA}$;

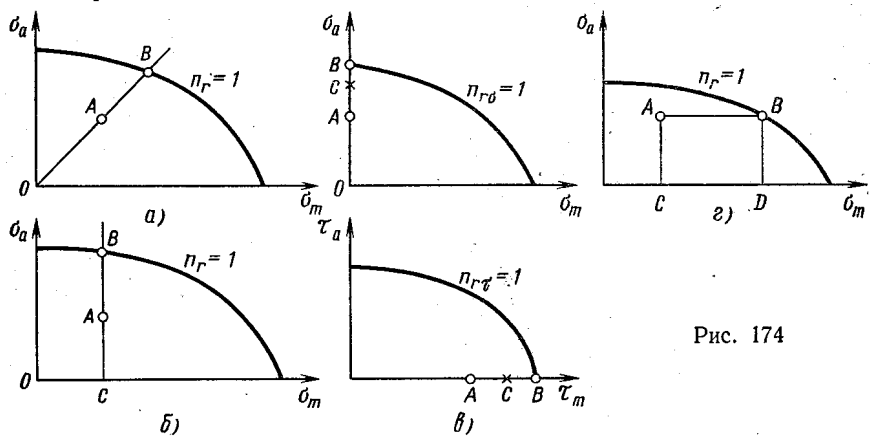


Рис. 174

$n_{r\tau} = \frac{\tau_в}{\tau_{max}} = \frac{OB}{OA}$; $n_r = \frac{n_{r\sigma} n_{r\tau}}{\sqrt{n_{r\sigma}^2 + n_{r\tau}^2}}$.

4. Увеличение силы притяжения магнита B приведет к увеличению постоянной составляющей цикла напряжений, поэтому для получения предельного цикла из точки A (рис. 174, *г*) нужно провести прямую, параллельную оси σ_m, до пересечения с предельной кривой (точка B на рис. 174, *г*). Коэффициент запаса $n_r = \frac{OD + DB}{OC + CA}$.

12.08. $\lambda = 108$. Для определения ресурса пружины воспользуемся формулой (3.68) [2] $\lambda = \frac{a_p \sigma_{-1д}^k N_0}{\sum_{i=1}^{m} n_{i\,бл} \sigma_{ai}^k}$. В данном случае $a_p = 1$; $\sigma_{-1д} = \sigma_{-1}$; $m = 5$.

12.09. $\lambda_{max} = (\lambda_0 + \lambda_{ст}) \sin\alpha + \sqrt{\lambda_{ст}^2 \sin^2\alpha + \frac{P}{T+P}\frac{v_1^2}{g}\lambda_{ст}}$, где λ_0 и $\lambda_{ст}$ — осадка пружины под действием сил T и P соответственно, приложенных статически $\left(\text{например, } \lambda_0 = \frac{T}{c}\right)$; c — жесткость пружины; g — ускорение свободного падения. Зависимость для наибольшего перемещения λ_{max} можно получить, решая уравнение энергетического баланса

$$\frac{T+P}{2g} v_1^2 + (T+P)\lambda_д \sin\alpha = \frac{c}{2}[(\lambda_д + \lambda_0 \sin\alpha)^2 - (\lambda_0 \sin\alpha)^2],$$

где $\lambda_д$ — наибольшая дополнительная осадка пружины, вызванная ударным воздействием; v_1 — скорость грузов P и T в начальный момент удара, вычисляемая по формуле $v_1 = v_0 \frac{P}{P+T}$. Определив $\lambda_д$, находим $\lambda_{max} = \lambda_0 \sin\alpha + \lambda_д$. Нетрудно показать, что наибольшее значение λ_{max} имеет место при $\alpha = \pi/2$.

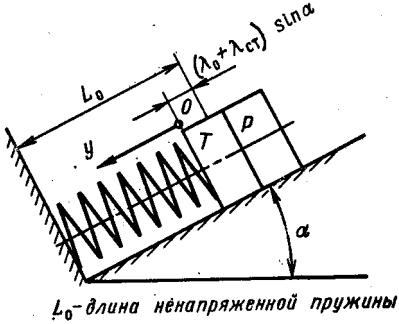


Рис. 175

Аналогичный результат получается при изучении закона движения груза с упругой системой. Сначала определяем начальную скорость v_1 совместного движения грузов P и T (см. выше). Отсчитывая координату y от положения статического равновесия грузов с пружиной (рис. 175), запишем уравнение движения

$$\frac{T+P}{g}\frac{d^2y}{dt^2} + c(y + \lambda_0 \sin\alpha + \lambda_{ст} \sin\alpha) - T\sin\alpha - P\sin\alpha = 0,$$

которое после преобразований имеет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0, \text{ где } \omega = \sqrt{\frac{cg}{T+P}}.$$

Решение этого уравнения $y = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$. С помощью начальных условий: при $t = 0$ $y = -\lambda_{ст} \sin\alpha$, $\frac{dy}{dt} = v_1$ находим постоянные интегрирования

$$C_1 = -\lambda_{ст} \sin\alpha; \; C_2 = \frac{v_1}{\omega} = v_0 \sqrt{\frac{P}{P+T}\frac{\lambda_{ст}}{g}}.$$

Уравнение движения можно представить в виде $y = A \sin(\omega t + \varphi)$. Амплитуда колебаний $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Наибольшее перемещение λ_{max} вычисляем по формуле $\lambda_{max} = (\lambda_0 + \lambda_{ст}) \sin\alpha + A$. Результат совпадает с полученным ранее.

12.10. $\frac{T+P}{g}\frac{v_1^2}{2}-(P+T)\lambda_д=\frac{c}{2}[(\lambda_0-\lambda_д)^2-\lambda_0^2]$ (обозначения те же, что в задаче 12.09), $v_1=v_0\frac{P}{P+T}$. Запишем уравнение движения грузов. Координату y, как и в задаче 12.09, отсчитываем от положения статического равновесия груза $P+T$ с упругой системой. В этом случае (рис. 176) $\frac{P+T}{g}\frac{d^2y}{dt^2}+$ $+(P+T)-c(\lambda_0+\lambda_{ст}-y)=0$, откуда $\frac{P+T}{g}\frac{d^2y}{dt^2}+cy=$ $=0$. Уравнение движения подобно полученному в задаче 12.09. Следует иметь в виду, что если y отсчитывать от положения статического равновесия колеблющегося груза массой M с упругой

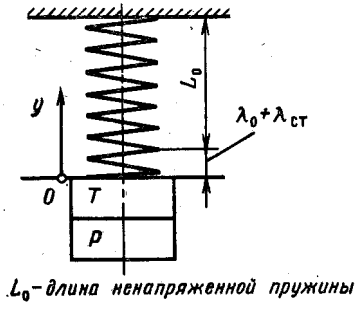


Рис. 176

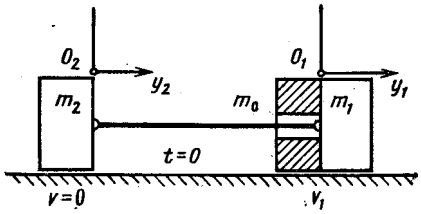


Рис. 177

системой, имеющей жесткость c, уравнение движения всегда имеет вид $M\frac{d^2y}{dt^2}+cy=0$ и $y=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$, где $\omega=$ $=\sqrt{\frac{c}{M}}$.

Начальные условия: при $t=0$ $y=\lambda_{ст}$, $\frac{dy}{dt}=v_1$ определяют постоянные интегрирования C_1 и C_2. После соответствующих преобразований получим $y=\lambda_{ст}\cos\omega t+\frac{v_1}{\omega}\sin\omega t$.

12.11. $\Delta l_{max}=v_0\sqrt{\frac{m_0}{c}\eta}$, где $\eta=\frac{1}{1+\frac{m_1}{m_0}}\frac{1}{1+\frac{m_1+m_0}{m_2}}$. При $m_1=m_2=m_0$ $\eta=\frac{1}{6}$; при $m_2=\infty$ $\eta=\frac{1}{1+\frac{m_1}{m_0}}$.

Уравнение энергетического баланса имеет вид

$$\frac{1}{2}(m_0+m_1)v_1^2=\frac{1}{2}c\,\Delta l_{max}^2+\frac{1}{2}(m_0+m_1+m_2)v_2^2, \qquad (1)$$

где $v_1=v_0\frac{m_0}{m_0+m_1}$ — скорость грузов m_0 и m_1 непосредственно после соударения; v_2 — скорость движения центра масс всей си-

стемы, определяемая зависимостью $(m_0 + m_1)\, v_1 = (m_0 + m_1 + m_2)\, v_2$. Решая уравнение (1), найдем Δl_{max}.

Рассмотрим другой вариант решения. Уравнения движения первого груза (рис. 177)

$$(m_1 + m_0)\frac{d^2y_1}{dt^2} + c(y_1 - y_2) = 0$$

и второго

$$m_2\frac{d^2y_2}{dt^2} - c(y_1 - y_2) = 0$$

приведем к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{c}{m_1 + m_0}y_1 &= \frac{c}{m_1 + m_0}y_2; \\ \frac{d^2y_2}{dt^2} + \frac{c}{m_2}y_2 &= \frac{c}{m_2}y_1. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Решение уравнений (2) ищем в виде $y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi)$; $y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi)$. Подставляя решения в уравнения (2), получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно a_1 и a_2, которая имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю,

$$\begin{vmatrix} \left(-\omega^2 + \frac{c}{m_1 + m_0}\right) & -\frac{c}{m_1 + m_0} \\ -\frac{c}{m_2} & \left(-\omega^2 + \frac{c}{m_2}\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и решая уравнение, найдем

$$\omega_1^2 = c\frac{m_1 + m_2 + m_0}{m_2(m_1 + m_0)}; \quad \omega_2^2 = 0,$$

поэтому $y_1 = a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + a_0 + b_0 t$; $y_2 = a_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + a_0 + b_0 t$.

Зависимость между амплитудами колебаний грузов a_1 и a_2 определяем подстановкой полученного решения в исходные уравнения. Вычитая из первого уравнения второе, получим $a_2 = -\frac{m_1 + m_0}{m_2}a_1$. Из начальных условий: при $t = 0$ $y_1 = y_2 = 0$; $\frac{dy_1}{dt} = v_1$, $\frac{dy_2}{dt} = 0$ следует $a_0 = 0$; $\varphi_1 = 0$; $a_1 = \frac{v_1}{\omega_1\left(1 + \frac{m_0 + m_1}{m_2}\right)}$;

$b_0 = -a_2\omega_1$.

Наибольшее удлинение троса равно разности амплитуд $\Delta l_{max} = a_1 - a_2 = \frac{v_1}{\omega_1}$.

12.12. а) $\tau_{max} = 109{,}5$ МПа; б) $\tau_{max} = 77{,}5$ МПа; в) $\tau_{max} = 89{,}4$ МПа.

Уравнение энергетического баланса для системы имеет вид $I_m\omega^2/2 = c\varphi^2/2$, где I_m — момент инерции маховика, $I_m = MD^2/8$; c — жесткость системы; φ — наибольший угол поворота махо-

вика после внезапной остановки заданного сечения вала. В случае а) $c = c_л = \frac{GI_к}{a}$, где $I_к$ — геометрический фактор жесткости вала при кручении; б) $c = c_п = \frac{GI_к}{b}$; в) $c = c_л + c_п$.

Наибольший момент, скручивающий вал: а) $\mathcal{M}_к = c_л\varphi = \sqrt{I_m\omega^2 c_л}$; б) $\mathcal{M}_к = c_п\varphi = \sqrt{I_m\omega^2 c_п}$; в) на левом участке вала $\mathcal{M}_{к.л} = \varphi c_л = \sqrt{\frac{I_m\omega^2 c_л}{1+\frac{c_п}{c_л}}}$; на правом участке $\mathcal{M}_{к.п} = \varphi c_п = \sqrt{\frac{I_m\omega^2 c_п}{1+\frac{c_п}{c_л}}}$. Зная момент, скручивающий вал, нетрудно определить наибольшие касательные напряжения.

12.13. $n_т = 2{,}8$.

Из уравнения энергетического баланса $Ps + P\delta_д = \frac{1}{2}c\delta_д^2$ определяем наибольшее перемещение свободного конца рамы при ударе $\delta_д = \delta_{ст} + \sqrt{\delta_{ст}^2 + 2s\delta_{ст}}$. Перемещение $\delta_{ст}$ свободного торца рамы при статическом нагружении силой P определяем методом Мора—Верещагина $\delta_{ст} = \frac{Pl^3}{EI_x} + \frac{2Pl^3}{GI_к} = 2{,}65\cdot10^{-3}$ м. Динамический прогиб $\delta_д = 10{,}4\cdot10^{-3}$ м. Максимальное усилие взаимодействия между грузом и рамой в процессе удара $P_д = P\frac{\delta_д}{\delta_{ст}} = 1{,}96$ кН. В наиболее нагруженном сечении $\mathcal{M}_{из} = P_д l$; $\mathcal{M}_к = P_д l$; $\sigma_{max} = 46$ МПа; $\tau_{max} = 38{,}3$ МПа; $\sigma_{экв} = 89{,}3$ МПа.

Запишем уравнение движения груза в контакте с рамой. Как отмечалось в решении задачи 12.10, при отсчете координаты y от положения статического равновесия груза с рамой $y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t\left(\omega = \sqrt{\frac{cg}{P}}\right)$. Начальные условия в данном случае имеют вид: при $t = 0$ $y = -\delta_{ст}$, $\frac{dy}{dt} = \sqrt{2gs}$, поэтому $y = -\delta_{ст}\cos\omega t + \frac{\sqrt{2gs}}{\omega}\sin\omega t$. Амплитуда колебаний $A = \sqrt{\delta_{ст}^2 + \frac{2gs}{\omega^2}}$, наибольшее смещение свободного торца рамы $\delta_д = \delta_{ст} + A$.

12.14. Прочность рессор практически одинакова, $n_т = 1{,}9$. Используя решение задачи 12.13, можно записать $\delta_д = \delta_{ст}\left(1 + \sqrt{1+\frac{2H}{\delta_{ст}}}\right)$. Назовем коэффициент при $\delta_{ст}$ коэффициентом динамичности: $k_д = 1 + \sqrt{1+\frac{2H}{\delta_{ст}}}$, который показывает, во сколько раз увеличиваются деформации и напряжения при ударном воздействии по сравнению со статическим приложением нагрузки. Эпюры изгибающих моментов при статическом нагруже-

нии балок силой P показаны на рис. 178. По методу Мора—Верещагина определяем $\delta_{ст}$: а) $\delta_{ст} = \frac{Pl^3}{24EI_x} = 0{,}08 \cdot 10^{-3}$ м; б) $\delta_{ст} = \frac{Pl^3}{6EI_x} = 0{,}32 \cdot 10^{-3}$ м. Коэффициент динамичности $k_д$ равен: а) $k_д \approx 71$, б) $k_д \approx 35{,}5$. Наибольшее динамическое напряжение в обоих случаях практически одинаково: $\sigma_{max} = 425$ МПа. Отметим, что в задачах, подобных данной, когда упругая система подвергается воздействию груза относительно малой массы, падающего с большой высоты ($\delta_{ст} \ll H$), коэффициент динамичности можно приближенно вычислять по формуле $k_д = \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст}}}$.

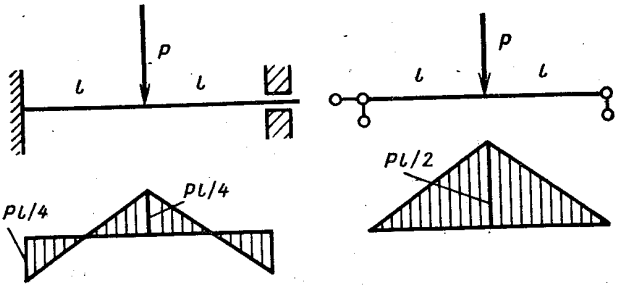


Рис. 178

12.15. $\delta_{max} = 12{,}23 \cdot 10^{-3}$ м; $n_т = 1{,}1$. Если между грузом и балкой помещена пружина, то $\delta_{max} = 50{,}8 \cdot 10^{-3}$ м; $n_т = 1{,}3$. Решение этой задачи подобно решению задачи 12.09 при $\alpha = \pi/2$, поэтому приведем только некоторые промежуточные результаты без выводов. Наибольшее смещение груза δ_{max} определяем по формуле

$$\delta_{max} = \delta_{1\,ст} + \delta_{2\,ст} + \sqrt{\delta_{2\,ст}^2 + \frac{v^2 m_2}{c\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)}},$$

где $\delta_{1ст}$ — деформация системы при статическом воздействии груза весом $m_1 g$; $\delta_{2ст}$ — то же, при действии груза $m_2 g$; c — жесткость системы. Если груз массой m_1 лежит на балке, то $c = \frac{48EI_x}{l^3} = 31{,}2$ кН/м, при наличии между грузом и балкой пружины c определяем из выражения $\frac{1}{c} = \frac{1}{c_б} + \frac{1}{c_п}$, где $c_б$ — жесткость балки; $c_п$ — жесткость пружины. В данном случае $c = \frac{c_б}{5} = \frac{48EI_x}{5l^3} = 6{,}25$ кН/м. Статические прогибы $\delta_{1ст}$ и $\delta_{2ст}$ равны $\delta_{1ст} = \frac{m_1 g}{c}$; $\delta_{2ст} = \frac{m_2 g}{c}$. Наибольшая сила взаимодействия между балкой и грузами в процессе удара $P_{max} = \delta_{max} c$. Максимальный изгибающий момент $\mathscr{M}_{max} = \frac{P_{max} l}{4}$. Наибольшее напряжение

в балке без пружины $\sigma_{max}=459$ МПа, с пружиной $\sigma_{max}=381$ МПа. Пружина смягчает удар, уменьшает силу взаимодействия между грузом и упругой системой, но увеличивает амплитуду колебаний груза.

12.16. $v_0=\sqrt{\frac{21}{200}\frac{EI_x\Delta^2}{ml^3}}=8{,}37$ см/с.

Представим рассматриваемую задачу как результат наложения двух: балка, деформированная смещением опоры на величину Δ, и балка, по которой производится удар грузом массой m (рис. 179, *а*). Условием нарушения контакта в опоре B является

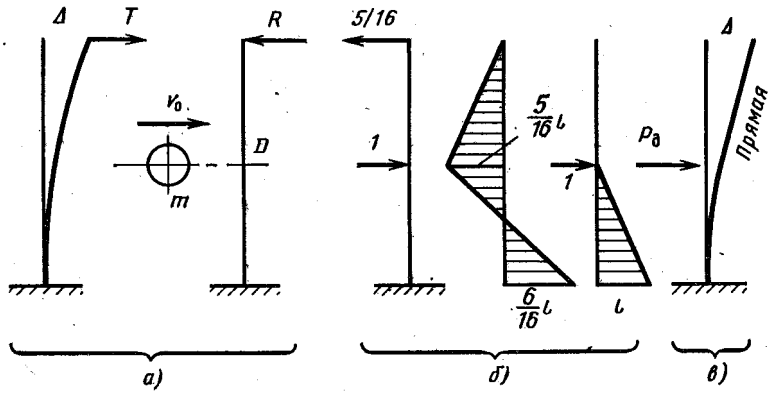


Рис. 179

равенство реакций T и R. Силу T определяем из условия $\Delta=\frac{T(2l)^3}{3EI_x}$. Для определения реакции R запишем уравнение энергетического баланса $\frac{mv_0^2}{2}=\frac{c\delta_д^2}{2}$, откуда $\delta_д=\sqrt{\frac{mv_0^2}{c}}$. Жесткость конструкции $c=1/\delta_{11}$, где δ_{11} — перемещение сечения D под действием силы, равной единице. Для определения δ_{11} нужно раскрыть статическую неопределимость, построить эпюру изгибающих моментов и «умножить» на нее единичную эпюру. Соответствующие эпюры показаны на рис. 179, *б*. В результате получим $\delta_{11}=\frac{7}{96}\frac{l^3}{EI_x}$. Максимальное усилие, действующее на балку при ударе, $P_д=c\delta_д=\sqrt{cmv_0^2}$, реакция опоры B при этом равна $R=\frac{5}{16}P_д=\frac{5}{16}\sqrt{\frac{96}{7}\frac{EI_x}{l^3}}$. Приравнивая R и T, найдем скорость v_0, с которой должен двигаться груз, чтобы контакт в опоре B был нарушен.

Рассмотрим другой вариант решения задачи, основанный на уравнении энергетического баланса заданной системы в начале удара и в крайнем правом положении:

$$\frac{mv_0^2}{2}+U^\Delta=U, \qquad (1)$$

где U^{Δ} — энергия деформации балки, деформированной смещением опоры $U^{\Delta} = \int_0^{2l} \frac{(Tz)^2\,dz}{2EI_x}$, но $T = \frac{3EI_x\Delta}{8l^3}$, поэтому $U^{\Delta} = \frac{3}{16}\frac{\Delta^2 EI_x}{l^3}$; U — энергия деформации балки в момент отрыва ее торца B от опоры (схема нагружения балки в этот момент пока-

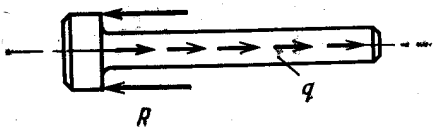


Рис. 180

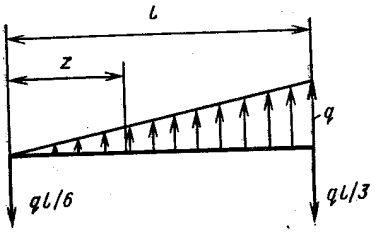


Рис. 181

зана на рис. 179, *в*). Из условия равенства прогиба свободного конца величине Δ находим $P_д = \frac{6}{5}\frac{\Delta EI_x}{l^3}$. Перемещение сечения D равно $y = \frac{P_д l^3}{3EI_x} = \frac{2}{5}\Delta$. Энергию деформации изгиба можно определить по формуле $U = \frac{1}{2}P_д y = \frac{6}{25}\frac{\Delta^2 EI_x}{l^3}$. Подставляя полученные зависимости в уравнение энергетического баланса (1), найдем величину v_0.

12.17. $\Delta l = \frac{vl}{2}\sqrt{\frac{3\rho}{E}} = 0{,}342$ мм. Считаем, что при торможении стержень находится под действием равномерно распределённых сил инерции интенсивностью q и силы реакции R (рис. 180). Наибольшую интенсивность q определяем из условия равенства кинетической энергии стержня и энергии его деформации:

$$\rho\frac{Flv^2}{2} = \int_0^l \frac{(qz)^2\,dz}{2EF}, \text{ откуда } q = \frac{Fv}{l}\sqrt{3E\rho}; \qquad \Delta l = \int_0^l \frac{qz\,dz}{EF}.$$

12.18. $\mathcal{M}_{max} = 18{,}36$ Н·м, $\sigma_{max} = 110{,}1$ МПа. По аналогии с предыдущей задачей предполагаем, что в процессе торможения стержень нагружен реакциями опор и силами инерции, в данном случае пропорциональными расстоянию от оси вращения (рис. 181). Интенсивность этих сил определяем, как и в задаче 12.17, из условия равенства кинетической энергии деформации стержня:

$$\frac{1}{2}I_m\omega^2 = U;\ U = \int_0^l \frac{\mathcal{M}^2_{изг}\,dz}{2EI_x};\ \mathcal{M}_{изг} = \frac{ql}{6}z - \frac{qz^2}{2}\frac{z}{3l};\ I_m = \frac{1}{3}\rho a^2 l^3;$$

$$q = \sqrt{\frac{105}{8}\rho E}\cdot\frac{a^3\omega}{l} = 7{,}15 \text{ кН/м};\ \mathcal{M}_{max} = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}};\ z_* = \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

13.01. Эпюра напряжений σ (МПа), вызываемых действием изгибающего момента $\mathcal{M} = Pl$, вычисленных по формулам теории изгиба кривого бруса показана на рис. 182, *а*; по формулам теории изгиба прямого бруса — на рис. 182, *в*. На рис. 182, *б* дана эпюра напряжений, возникающих от действия нормальной силы $N = P$.

13.02. См. рис. 183 (напряжения даны в МПа). Расхождение значений окружных напряжений невелико, но при использовании теории расчета колец следует не забывать о существенных в данном случае радиальных напряжениях σ_r.

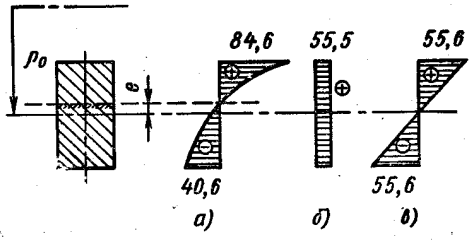


Рис. 182

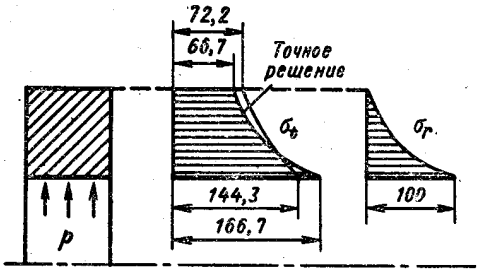


Рис. 183

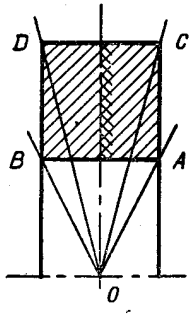


Рис. 184

13.03. $\sigma_t^A = 192{,}3$ МПа; $\sigma_t^B = 192{,}3$ МПа; $\sigma_t^C = 96{,}2$ МПа; $\sigma_t^D = 96{,}2$ МПа (положение точек и нейтрального слоя показано на рис. 184). По формулам изгиба прямого бруса $\sigma_{max} = 133{,}3$ МПа, напряжения по толщине кольца (вдоль радиуса) не меняются, положение нейтрального слоя совпадает с изображенным на рис. 184.

13.04. $\sigma_t^A = 55{,}4$ МПа (рис. 185); $\sigma_t^B = -31{,}1$ МПа; $\sigma_t^C = 11{,}07$ МПа; $\sigma_t^D = -13{,}8$ МПа; $b = 57{,}98$ мм, $a = 22{,}03$ мм.

13.05. Когда один конец трубки заделан (см. рис. 13.05, *а*) трубка находится в условиях стесненного кручения. Внутренний крутящий момент $\mathcal{M}_к$ можно рассматривать как сумму двух моментов: $\mathcal{M}_\theta$ — момент основных касательных напряжений τ_1; $\mathcal{M}_\omega$ — момент вторичных касательных напряжений τ_2. Кроме того,

в поперечных сечениях возникают нормальные напряжения, определяющие бимомент B. Эпюры $\mathscr{M}_\theta$, $\mathscr{M}_\omega$, B показаны на рис. 186, там же, для проверки промежуточных результатов расчета, приведены эпюры секториальных площадей с полюсом в центре окружности — ω_1, и с полюсом в центре кручения — ω. Наибольшие напряжения $\tau_1 = 10{,}52$ МПа возникают на свободном конце; наибольшие напряжения $\tau_2 = 2{,}74$ МПа возникают в сечении около заделки, там же действуют наибольшие нормальные напряжения $\sigma = 85{,}4$ МПа. Угол закручивания стержня $\varphi = 0{,}01774$ рад.

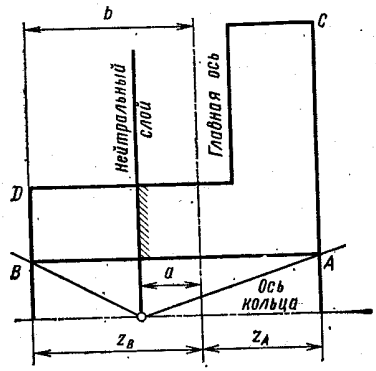


Рис. 185

Когда оба конца трубки свободны (см. рис. 13.05, *б*) депланация поперечных сечений не стеснена, в них возникают только касательные напряжения $\tau = 59{,}7$ МПа; $\varphi = 0{,}1492$ рад.

Если прорезь заварить по всей длине, поперечные сечения при кручении останутся плоскими, $\tau = 1{,}989$ МПа; $\varphi = 0{,}000497$ рад.

13.06. В случае *а* балка находится в условиях поперечного изгиба, $\sigma_{max} = 93{,}7$ МПа; $\tau_{max} = 7$ МПа.

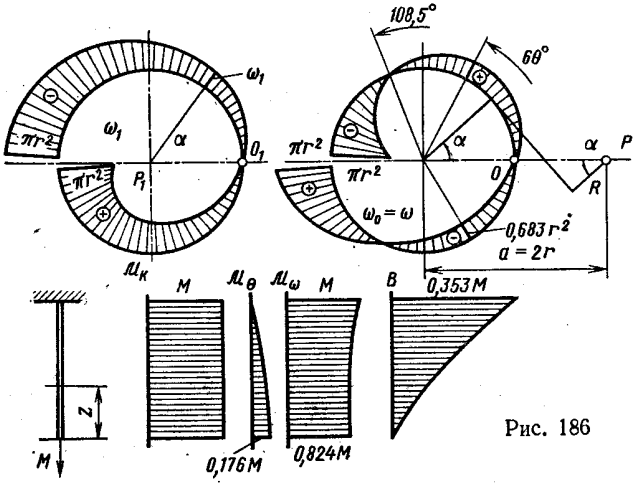


Рис. 186

В случае *б* изгиб сопровождается стесненным кручением. Эпюры внутренних силовых факторов $\mathscr{M}_{изг}$, $\mathscr{M}_к$, $\mathscr{M}_\theta$, $\mathscr{M}_\omega$, B показаны на рис. 187. Там же даны эпюры геометрических характеристик сечения ω_1, x, y, ω. Нормальные напряжения при $z =$

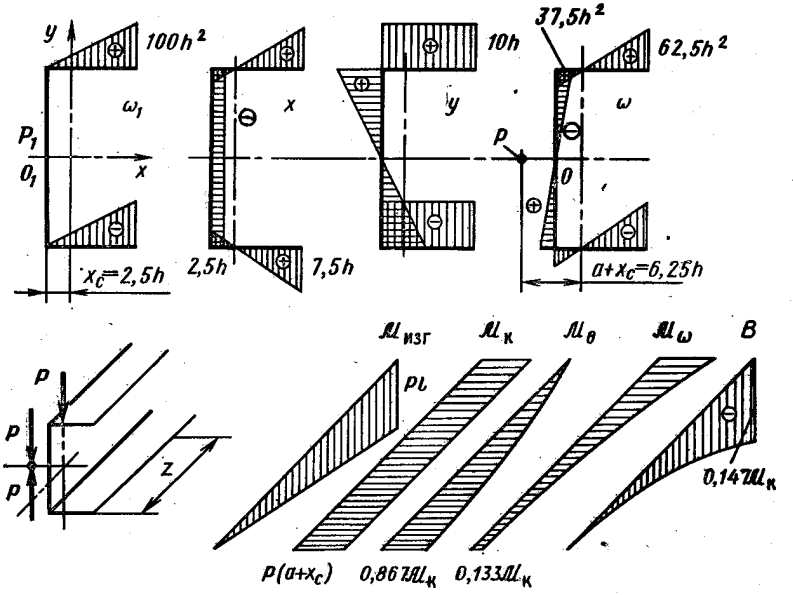


Рис. 187

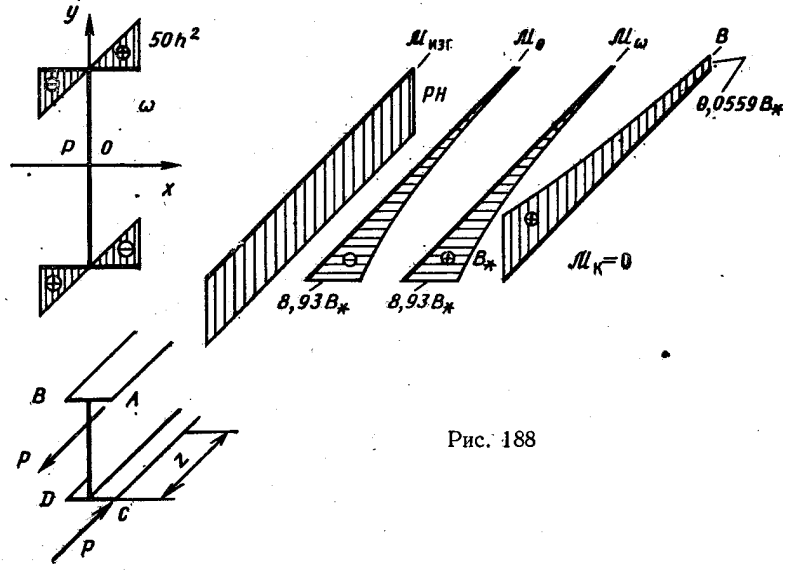


Рис. 188

$\sigma_1 = \frac{M_{изг}}{W_x} = 93{,}7$ МПа; $\sigma_2 = \frac{B\omega}{I_\omega} = 122{,}7$ МПа; $\sigma_{max} = 167{,}3$ МПа.

Касательные напряжения при $z = 0$ $\tau_{max} = \frac{M_\theta}{W_к} = 50{,}8$ МПа.

13.07. В случае *а* балка находится в условиях чистого изгиба; $\sigma_{max} = 18{,}75$ МПа.

В случае *б* изгиб сопровождается стесненным кручением; эпюры внутренних силовых факторов и секториальных площадей даны на рис. 188. Напряжения $\sigma = \frac{B\omega}{I_\omega} = 75$ МПа; $\sigma = \frac{M_{изг}}{W_x} = 18{,}75$ МПа; $\sigma_{max} = 93{,}7$ МПа. Наибольшее касательное напряжение $\tau_{max} = 33{,}5$ МПа.

13.08. $y_{max} = 0{,}781$ мм; $\sigma_{max} = 469$ МПа. Эпюры прогибов и внутренних изгибающих моментов даны на рис. 189. Уравнение оси изогнутой линейки имеет вид $y = e^{-kz} \times (C_1 \sin kz + C_2 \cos kz)$, где $k = \sqrt[4]{\frac{\chi}{4EI_x}}$ [вторая часть уравнения изогнутой оси вида $e^{kz}(C_3 \sin kz + C_4 \cos kz)$ в данном случае равна нулю, так как линейка длинная, влияние нагрузки имеет местный характер].

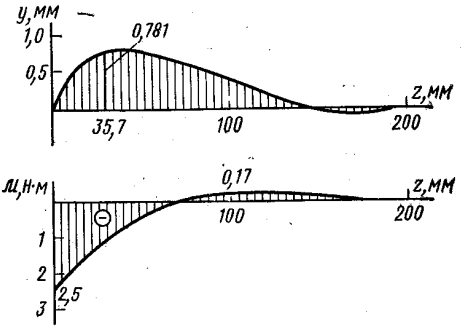


Рис. 189

Постоянные интегрирования определяем с помощью граничных условий: при $z = 0$ $y = 0$, $EI_x y'' = M/2$.

13.09. $\sigma_{max} = 681$ МПа, $y_{max} = -3{,}45$ мм; без резиновой подкладки $\sigma_{max} = 833$ МПа, $y_{max} = -4{,}63$ мм. Уравнение оси изогнутой пружины имеет вид $y = C_1 \sin kz \operatorname{sh} kz + C_2 \sin kz \operatorname{ch} kz + C_3 \cos kz \operatorname{sh} kz + C_4 \cos kz \operatorname{ch} kz$, где $k = \sqrt[4]{\frac{\chi}{4EI_x}} = 12{,}91$.

С помощью граничных условий: при $z = 0$ $y' = 0$, $EI_x y''' = -\frac{P}{2}$; при $z = l$ $y = 0$, $y' = 0$ определяем постоянные интегрирования

$$C_3 = -C_2 = \frac{P}{8k^3EI_x} = 0{,}006455;$$

$$C_1 = \frac{P}{8k^3EI_x} \frac{\sin^2 kl \operatorname{ch}^2 kl + \cos^2 kl \operatorname{sh}^2 kl}{\sin kl \cos kl + \operatorname{sh} kl \operatorname{ch} kl} = 0{,}006811;$$

$$C_4 = -\frac{P}{8k^3EI_x} \frac{\operatorname{sh}^2 kl - \sin^2 kl}{\sin kl \cos kl + \operatorname{sh} kl \operatorname{ch} kl} = -0{,}003454.$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 190, *а*. На рис. 190, *б* изображена эпюра изгибающих моментов, возникающих в пружине без резиновой подкладки.

13.10. Срединная плоскость превращается в сферическую поверхность.

13.11. Срединная плоскость превращается в цилиндрическую поверхность; $w_{max} = \frac{5}{384}\frac{pa^4}{D}$; $\sigma_{экв} = \frac{3}{4} p \frac{a^2}{h^2}\sqrt{1-\mu+\mu^2}$.

13.12. $p_к = p_0$; $\sigma_{1*} = \frac{p_{1*}D}{2h}$; $\sigma_{2*} = \frac{p_{2*}D}{2h}$; $p_{1*} = 3{,}5p_0$; $p_{2*} = p_0$ (индексом 1 обозначены величины, относящиеся к наружной трубке, индексом 2 — к внутренней). Графическое решение показано на рис. 191, где через u обозначены перемещения в радиальном направлении. Построение выполняем в следующем порядке: 1) проводим оси координат p_1, u_1 и p_2, u_2 со сдвигом по оси абсцисс на величину зазора Δ; 2) строим характеристики трубок — зависимости давления от изменения радиуса; 3) положение точек A и B, характеризующих состояние трубок при сборке, определяем из условия равенства длины отрезка AB давлению сборки в выбранном масштабе. «Движение» по характеристикам трубок при нагружении их внутренним давлением в процессе сборки помечено стрелками (→. Для определения контактного давления, проводим линии разгрузки)→ с учетом характеристик материала трубок. Процесс нагружения конструкции рабочим давлением p_* изоб-

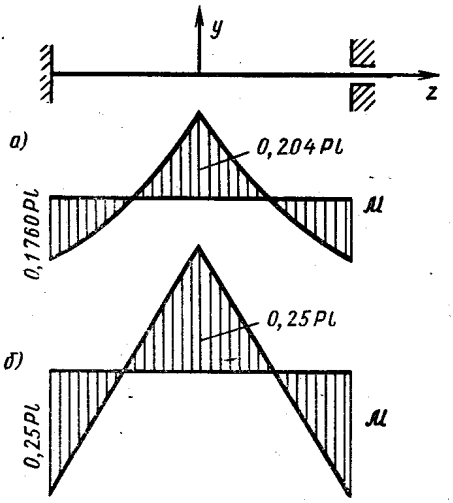


Рис. 190

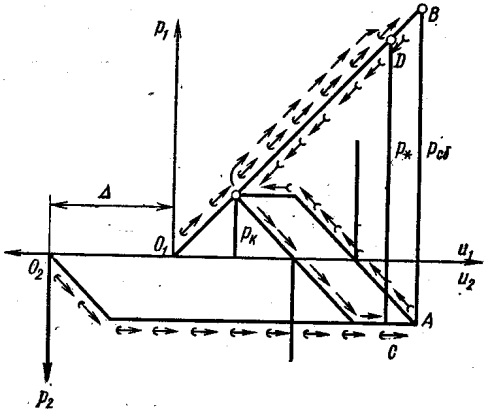


Рис. 191

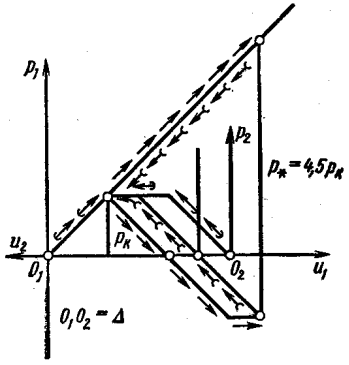


Рис. 192

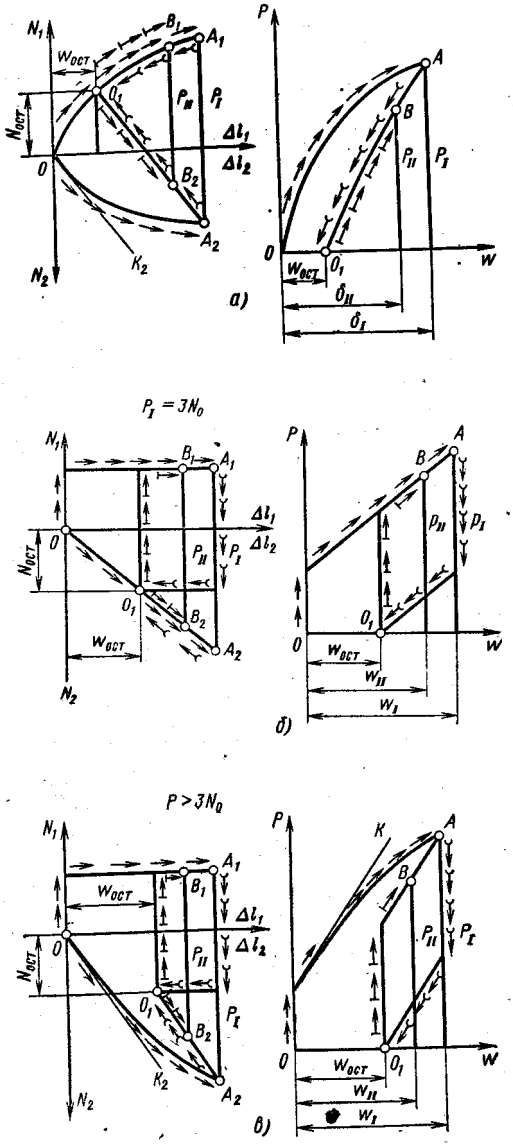

N_1
$W_{ост}$
B_1
A_1
O_1
P_{II}
P_I
$N_{ост}$
Δl_1
Δl_2
0
B_2
A_2
K_2
N_2
а)
P
A
B
P_{II}
P_I
0
$W_{ост}$
O_1
W
δ_{II}
δ_I
$P_I = 3N_0$
б)
W_{II}
W_I
$P > 3N_0$
K
в)

Рис. 193

ражен стрелками →. Положение точек C и D определяется равенством отрезка CD в соответствующем масштабе давлению p_*.

13.13. При сборке $\Delta D_{1сб} = \varepsilon_т D$; $\Delta D_{2сб} = 2\varepsilon_т D$; $\sigma_{1сб} = \sigma_{2сб} = \frac{p_к D}{2h}$. При действии рабочего давления p_* $\Delta D_{1*} = 3{,}5\varepsilon_т D$; $\Delta D_{2*} = 0{,}5\varepsilon_т D$; $p_{1*} = 3{,}5p_к$; $p_{2*} = p_к$. После разгрузки $\Delta D_{1ост} = \varepsilon_т D$; $\Delta D_{2ост} = 2\varepsilon_т D$; $\sigma_{1ост} = \sigma_{2ост} = \frac{p_0 D}{2h}$. Графическое решение показано на рис. 192, пояснения к графику см. в решении задачи 13.12.

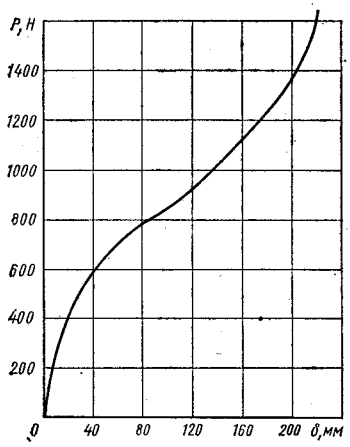


Рис. 194

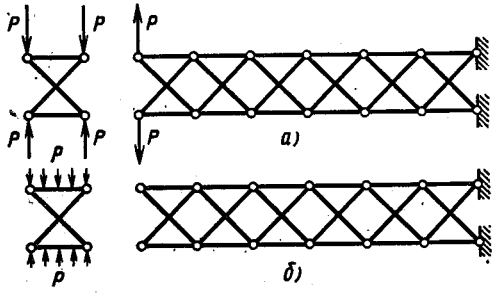


Рис. 195

13.14. См. рис. 193. Пояснения к графикам аналогичны пояснению, приведенному в решении задачи 13.12. Стрелками → показан процесс вторичного нагружения.

13.15. Характеристика изображена на рис. 194. При построении характеристики следует учесть, что в данном случае принцип начальных размеров не применим.

13.16. В случае *а* действие взаимно уравновешенных сил распространяется на всю конструкцию, в случае *б* действие нагрузки носит локальный характер (рис. 195).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Общие для всех задач данные 5

Глава 1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА 6

§ 1. Статически определимые задачи растяжения и сжатия . . 6
§ 2. Механические свойства машиностроительных материалов при растяжении и сжатии 13
§ 3. Расчет статически неопределимых систем в пределах пропорциональности 15
§ 4. Растяжение, сжатие при упруго-пластических деформациях 19

Глава 2. ИЗГИБ БРУСА 25

§ 1. Определение внутренних силовых факторов при изгибе . . 25
§ 2. Расчет статически определимых балок и плоских рам в пределах пропорциональности 27
§ 3. Расчет статически определимых балок и плоских рам при упруго-пластических деформациях 33
§ 4. Косой изгиб и внецентренное нагружение прямых брусьев 35
§ 5. Расчет статически неопределимых балок 38
§ 6. Расчет статически неопределимых плоских рам 40

Глава 3. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕННЫМ И ДЕФОРМИРОВАННЫМ СОСТОЯНИЯМИ 44

§ 1. Исследование напряженно-деформированного состояния . . 44
§ 2. Связь между напряженным и деформированным состояниями 47

Глава 4. КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО БРУСА 49

§ 1. Статически определимые задачи кручения 49
§ 2. Статически неопределимые задачи кручения 53

Глава 5. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ НАГРУЖЕНИЯ БРУСА 57

§ 1. Вариационные принципы Лагранжа и Кастильяно. Работа внешних сил и потенциальная энергия деформации 57

§ 2. Расчет плоско-пространственных и пространственных стержневых систем 59
§ 3. Расчет пружин 62

Глава 6. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ 65

§ 1. Теории начала текучести 65
§ 2. Теория начала разрушения 69

Глава 7. РАСЧЕТ ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН 71

Глава 8. РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ 74

§ 1. Задачи безмоментной теории расчета оболочек 74
§ 2. Примеры исследования краевого эффекта 79

Глава 9. РАСЧЕТ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ И ДИСКОВ 81

§ 1. Расчет толстостенных цилиндров в пределах упругости . . . 81
§ 2. Определение напряжений в трубе из упруго-пластичного материала 84
§ 3. Расчет дисков 85

Глава 10. МЕСТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ 87

Глава 11. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОДОЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ 91

§ 1. Определение критической силы для продольно сжатых стержней при линейно-упругих деформациях 91
§ 2. Определение критической силы для продольно сжатых стержней за пределами упругости 94
§ 3. Расчет продольно сжатых стержней на устойчивость 96
§ 4. Продольно-поперечный изгиб 100

Глава 12. ВЫНОСЛИВОСТЬ И УДАР 103

§ 1. Примеры расчетов на прочность при напряжениях, переменных во времени 103
§ 2. Оценка напряжений и деформаций при ударном воздействии 107

Глава 13. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ 111

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ 116

Глава 1 116
Глава 2 136
Глава 3 151
Глава 4 156
Глава 5 161
Глава 6 169
Глава 7 174
Глава 8 179
Глава 9 187
Глава 10 192
Глава 11 194
Глава 12 207
Глава 13 216